EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

9 de Septiembre de 2020.

1.- Consideramos la sucesión de funciones $f_n(x) = x - \dfrac{x}{n+1}$ con $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Calcula su límite puntual f. ¿La sucesión f_n converge uniformemente a su límite puntual f en $[0,1]$? ¿Por qué?

2.- La serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{2\pi})^{2n}$ converge uniformemente a una función $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Sea $S(x)$ la serie de Fourier de la función f.

.- Calcula los coeficientes de Fourier $\frac{a_0}{2}$ y b_n de la serie de Fourier $S(x)$.

3.- Encuentra el valor de la y que satisface $4y(x) - xy'(x) = 4x^2$ con $y(1) = 1$.

4.- En el siglo XXIII la población mundial se cuenta por billones de personal. El problema de la vivienda se pudo resolver en el siglo XXII. No así él del juego. Tu tatara....nieto juega el número $4^{51}3^{18}$ del sorteo de Navidad de dentro de dos siglos, cuyo primer premio será el 1.000.788.824 (un número bajito). Si los números terminados en 24 reciben un premio de 1000 eurodolares ¿Le tocará el premio a tu tatara...nieto?

5.- Calcula el mínimo común múltiplo entre $P(x) = x^5 + x^4 + x$ y $Q(x) = x^3 + x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_2[x]$, y encuentra los polinomios $R(x)$ y $S(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ que satisfacen la ecuación:

$$R(x)P(x) + S(x)Q(x) = x.$$

6.- Prueba que $\mathbb{Z}_3[x]/ < x^3 + 2x + 1 >$ es un cuerpo. ¿Cuántos elementos tiene? Encuentra el inverso de $[x^2 + 1]$ y resuelve la ecuación $[x^2 + 1]p(x) = [x]$ en $\mathbb{Z}_3[x]/ < x^3 + 2x + 1 >$.

Revisión del examen:

.- No será presencial.

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://www.mat.ucm.es/ cruizb/2-AM/Examenes-i.html

.- Si un alumno está en desacuerdo con su nota deberá enviar un e-mail a su profesor, al menos 24 horas antes de la revisión, indicando el motivo de su petición.

.- El día y a la hora de la revisión el alumno deberá estar pendiente de que el profesor se ponga en contacto con él.

La revisión del examen se efectuará el día 16 de septiembre de 16 horas a 17h. No es obligatorio solicitar la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen tiene una duración total de 2h 55' horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

A LAS 15H 55' TODOS DEBEMOS ESTAR FUERA DEL AULA

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Las siguientes funciones tienen por Transformadas de Laplace las funciones en s que figuran a su lado:

(1) Si $f(t) = 1$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s}$

(2) Si $f(t) = \text{sen}(t)$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s^2+1}$

(3) Si $f(t) = \cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

(4) Si $f(t) = e^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$

(5) Si $f(t) = \text{senh}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

(6) Si $f(t) = \cosh(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$

(7) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\text{sen}(\beta t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(8) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(9) En general, dada $f(t)$, entonces $L[e^{-\alpha t}f(t)](s) = Lf(s+\alpha)$

(10) Si $f(t) = t^n$, entonces $Lf(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, ($\Gamma$ es la función Gamma de Euler, $\Gamma(n+1) = n!$).

(11) Si $f(t) = te^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$

(12) Si $f(t) = t\text{sen}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(13) Si $f(t) = t\cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(14) En general, dada $f(t)$, entonces $L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{\partial^n Lf(s)}{\partial s^n}$

1:] $f_n(x) = x - \frac{x}{n+1}$ con $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$.

- Límite puntual. Fijamos $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x - \frac{x}{n+1} = x.$$

Luego $f(x) = x$ es el límite puntual de la sucesión.

- $$|f(x) - f_n(x)| = \left|x - \left(x - \frac{x}{n+1}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{n+1}\right| \underset{x \le 1}{\le} \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Luego converge uniformemente $f(x) = x$ es el límite uniforme en $[0,1]$ de la sucesión de funciones.

2:] $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2n}$ $\quad x \in [-\pi, \pi]$

Estamos ante una serie geométrica así $0 \le \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 < 1$,

Luego $$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 - x^2} = f(x)$$ función par

- Como f es par $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\frac{a_0}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \underset{\text{la serie converge uniformemente.}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2n} dx \underset{\text{funciones pares}}{=}$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2n} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2\pi)^{2n}}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\cancel{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{\pi^{2n}} \cdot \cancel{\pi}}{(2n+1)\, 4^n\, \cancel{\pi^{2n}}} =$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)}}$$

O también $$\boxed{\frac{a_0}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\pi^2}{4\pi^2 - x^2}\,dx \underset{\text{par}}{=}$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi^2 - x^2}\,dx = 4\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{(2\pi - x)(2\pi + x)}\,dx =$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi} \frac{\frac{1}{4\pi}}{2\pi - x} + \frac{\frac{1}{4\pi}}{2\pi + x}\,dx = -\ln(2\pi - x)\Big|_0^{\pi} + \ln(2\pi + x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\ln \pi + \cancel{\ln 2\pi} + \ln 3\pi - \cancel{\ln 2\pi} = \ln \frac{3\pi}{\pi} = \boxed{\ln 3}$$

3º]

$$\begin{cases} 4y(x) - x\,y'(x) = 4x^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x\,y'(x) = 4x^2 - 4y(x) \\ y(1) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y'(x) = \frac{4}{x}\,y(x) - 4x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$ E.D.O LINEAL NO HOMOGÉNEA

1º] RESOLVEMOS LA EDO HOMOGÉNEA ASOCIADA

$y'(x) = \frac{4}{x}\,y(x)$ ASÍ $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{4}{x}$.

INTEGRANDO $\ln|y(x)| = 4\ln x + k = \ln x^4 + k$

LUEGO $\boxed{y(x) = k\,x^4 \quad k \in \mathbb{R}}$

SOLUCIONES DE LA E.D.O HOMOGÉNEA

2º] SOLUCIÓN PARTICULAR. PROBAMOS

$y(x) = Ax^2$

$y'(x) = 2Ax$ ENTRAMOS EN LA EDO

$2Ax = \frac{4}{x}Ax^2 - 4x = (4A-4)x$

LUEGO $2A = 4A - 4 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$

Y ASÍ $y(x) = 2x^2$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O NO HOMOGÉNEA

2) O TAMBIÉN PODEMOS USAR EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES.

PROBAMOS

$$y(x) = k(x)\,x^4$$

$$y'(x) = k'(x)\,x^4 + 4k(x)\,x^3$$

ENTRANDO EN LA EDO

$$k'(x)\,x^4 + \cancel{4k(x)\,x^3} = \cancel{\frac{4}{x}k(x)\,x^4} - 4x$$

$$\Rightarrow \quad k'(x) = -\frac{4}{x^3}$$

INTEGRANDO $\quad k(x) = \int -\frac{4}{x^3}\,dx = \frac{2}{x^2}$

LUEGO $\quad \boxed{y(x) = \frac{2}{x^2}\,x^4 = 2x^2}$

3) LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA EDO LINEAL ES

$$\boxed{y(x) = 2x^2 + k\,x^4 \qquad k \in \mathbb{R}}$$

4) LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALOR INICIAL ES

COMO $y(1) = 1$

$$1 = y(1) = 2 + k \quad \Rightarrow \quad k = -1$$

Y ASÍ LA SOLUCIÓN BUSCADA ES

$$\boxed{y(x) = 2x^2 - x^4}$$

4º) Necesitamos conocer el resto de dividir $4^{52}3^{18}$ entre 100

es decir $4^{52}3^{18} \equiv x \mod 100$

Para ver esto, ¿ $4^{52}3^{18} \in \mathbb{Z}_{100}$?

Como $\mathbb{Z}_{100} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$

pasamos a trabajar en $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$ a través de φ

$$\varphi: \mathbb{Z}_{100} \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$$
$$a \longrightarrow \varphi(a) = ([a]_4, [a]_{25})$$

φ isomorfismo

$[4^{52}3^{18}]_4 = 0$ ya que 4 múltiplo de 4

$[4^{51}3^{18}]_{25}$ como $mcd(4,25)=1$ y $mcd(3,25)=1$

y $\phi(25) = \phi(5^2) = 25(1-\frac{1}{5}) = 20$

Por el teorema de Euler

$$4^{51} \equiv 4^{20}4^{20}4^{11} \equiv 4^{11} = 4^3 4^3 4^3 4^2 \equiv 64\times 64\times 64\times 16 \equiv$$
$$\equiv 14\times 14\times 14\times 16 = (-11)\times(-11)\times(-11)\times(-9) =$$
$$= 121\times 99 = -4\times -1 = 4 \mod 25$$

$$3^{18} = \underbrace{3^3\times 3^3\times\dots\times 3^3}_{6\text{-veces}} = \underbrace{2\times\dots\times 2}_{6\text{-veces}} = 64 \equiv 14 \mod 25$$

$3^3 = 27$

Luego $[4^{51}3^{18}]_{25} = [4\times 14]_{25} = [56]_{25} = 6 \mod 25$

Así $\varphi((4^{51}3^{18})) = ([0]_4, [6]_{25})$;

Luego $x = \varphi^{-1}([0]_4, [6]_{25})$ es decir

$x \equiv 0 \mod 4$

$x \equiv 6 \mod 25$

Usando el teorema chino del resto

$$x = 0 + 6\times 4\times [4]^{-1}_{25} = 24\times 19 = 456 \mod 100$$

$4\times 6 = 24 \equiv -1 \mod 25$

Luego $[4]^{-1} = -6 \equiv 19 \mod 25$

Luego $x = 56$ ¡No le tocará la terminación!

5:] $P(x) = x^5 + x^4 + x$, $Q(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

1) Para calcular el m.c.d (P, Q) usaremos el algoritmo de Euclides.

Así

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 + x & x^3+x^2+1 \\ \hline -x^5 - x^4 - x^2 & x^2 \\ \hline x^2 + x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 + 1 & x^2+x \\ \hline -x^3 - x^2 & x \\ \hline 1 & \end{array}$$

Como P y Q no tienen divisores comunes el m.c.m $(P,Q) = P \cdot Q$.

Luego $1 \in$ m.c.d (P, Q).; es decir P y Q. no tienen divisores comunes.

2) Por tanto por el lema de Bezout existe $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ tal que

$$1 = u(x)[x^5 + x^4 + x] + v(x)[x^3+x^2+1]$$

Para ver esto podemos usar el algoritmo de Euclides y

r	P	Q	x^2+x	1
q		x^2	x	
α	1	0	1	x
β	0	1	x^2	$1+x^3$

Luego $x[x^5+x^4+x] + (1+x^3)[x^3+x^2+1] = 1$ (*)

Luego $R(x) = x^2$
y $S(x) = (x + x^4)$ (La igualdad (*) se comprueba haciendo la multiplicación de la parte izquierda de la igualdad)

R y S se consiguen multiplicando ambos lados de la igualdad (*) por x.

6º $\mathbb{Z}_3[x] / \langle x^3+2x+1 \rangle$

1) El polinomio $f(x) = x^3+2x+1$ tiene grado 3

Veamos si tiene raíces.

$f(0) = 1 \neq 0$

$f(1) = 1+2+1 = 1 \neq 0$

$f(2) = 8+4+1 = 1 \neq 0$

Luego f es irreducible y el cociente

$\mathbb{Z}_3[x] / x^3+2x+1$ es un cuerpo

2) Este cuerpo tiene $3^3 = 27$ elementos

$x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]/f$ y como no es nulo

tiene un inverso. Vamos a calcularlo usando el algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x+1 & x^2+1 \\ -x^3 - x & x \\ \hline x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+1 & x+1 \\ -x^2-x & x+2 \\ \hline 2x+1 & \\ -2x-2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

r	x^3+2x+1	x^2+1	$x+1$	2
q		x	$x+2$	
α	1	0	1	$2x+1$
β	0	1	$2x$	$1+x^2+2x$

Luego $2 = (2x+1)(x^3+2x+1) + (x^2+1)(1+x^2+2x)$

Luego como $x^3+2x+1 = 0$ en $\mathbb{Z}_3[x]/f$

$$(x^2+1)^{-1} = 2x^2+x+2$$

Comprobación

$$\begin{array}{r} 2x^2+x+2 \\ x^2+1 \\ \hline 2x^2+x+2 \\ 2x^4+x^3+2x^2 \\ \hline 2x^4+x^3+x^2+x+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+x^3+x^2+x+2 & x^3+2x+1 \\ -2x^4 \quad -x^2-2x & 2x+1 \\ \hline x^3 \quad +2x+2 & \\ -x^3 \quad -2x-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

3) La ecuación $[x^2+1]g(x) = [x]$

tiene por solución

$g(x) = [x][x^2+1]^{-1} = [x][2x^2+x+2] =$

$= [2x^3+x^2+2x] =$

$= [x+2+x^2+2] =$

$x^3+2x = 2$

$x^3 = x+2$

$= [x^2+x+1]$