HOJA 1:

PROBLEMA 1: A1) $A = \{2n : n \geq 5\} =$

$= \{2\times 5, 2\times 6, \ldots, 2\times n, 2\times(n+1), \ldots\}$

PARECE QUE $2\times 5 = 10 \in A$ ES MENOR QUE CUALQUIER OTRO ELEMENTO DE CONJUNTO A.

CLARO:

SI $n \geq 5$

ENTONCES $2n \geq 2\times 5 = 10$

LUEGO $\boxed{10 = \min A}$; SI $2n \in A$, TAMBIÉN $2(n+1) \in A$ Y $2(n+1) > 2n$.

NO HAY MÁXIMO

A2) $B = \{2k^2 + 7 : 8 \geq k \geq 2\} =$

$= \{2\times 2^2 + 7, 2\times 3^2 + 7, 2\times 4^2 + 7, 2\times 5^2 + 7, 2\times 6^2 + 7, 2\times 7^2 + 7, 2\times 8^2 + 7\}$

SI $2 \leq k \leq 8$ ENTONCES

$2^2 \leq 4^2 \leq 8^2$ Y

$2\times 2^2 \leq 2k^2 \leq 2\times 8^2$ POR ULTIMO

$2\times 2^2 + 7 \leq 2k^2 + 7 \leq 2\times 8^2 + 7$

LUEGO $2\times 2^2 + 7 = 15 = \min B$

$2\times 8^2 + 7 = 135 = \max B$

B) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ NO TIENE MÍNIMO, PARA DARLO $\frac{1}{n}$ ELEMENTO DE CONJUNTO $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ Y $\frac{1}{n+1}$ ESTÁ TAMBIÉN EN EL CONJUNTO.

POR OTRO LADO $1 = \frac{1}{1}$ Y $\frac{1}{n} \leq 1$ PARA DARLO $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

LUEGO $1 = \max$.

HOJA 1:

PROBLEMA 2:

5) $0 < x_0 < 1$ y

$$x_n = x_{n-1} \frac{n}{n+1} \quad \text{PARA } n \geq 1.$$

SEA $A = \{ n \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1 \}$.

A ES NO VACÍO, 0 AL MENOS ESTÁ EN A

YA QUE $0 < x_0 < 1$.

SI $n \in A$ VEAMOS QUE $n+1 \in A$. CLARO

SI $n \in A$ ASÍ $0 < x_n < 1$

POR OTRO LADO $x_n = x_n \frac{n+1}{n+2}$

COMO $0 < \frac{n+1}{n+1} < 1$ SE TIENE QUE

Y $0 < x_n < 1$

$$0 < x_n \frac{n+1}{n+2} = x_{n+1} < x_n < 1. \quad \text{LUEGO}$$

$0 < x_{n+1} < 1$ Y ASÍ $n+1 \in A$.

POR EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN,

$A = \mathbb{N}$

POR TANTO $\forall m \in \mathbb{N}$ SE TIENE QUE

$0 < x_m < 1$.

— o —

HOJA 1:

PROBLEMA 3: PROPIEDADES DE LA SUMA.

a) SI $x+y = x+z \Rightarrow y = z$

DEM SUMANDO EN AMBOS LADOS DE LA IGUALDAD EL ELEMENTO OPUESTO DE x

$$(-x) + x + y = (-x) + x + z$$

USANDO LA PROPIEDAD ASOCIATIVA, ESTO ES IGUAL A

$$((-x) + x) + y = ((-x) + x) + z, \text{ Y ASÍ}$$

$$0 + y = 0 + z$$

Y COMO 0 ES EL ELEMENTO NEUTRO DE LA SUMA

$$y = z.$$

EN LA PRÁCTICA, LO ANTERIOR SE REDUCE A

$$\cancel{x} + y = \cancel{x} + z \quad \text{Y} \quad y = z$$

O BIEN, SI $x + y = x + z$ PASANDO LA x AL OTRO LADO DE LA IGUALDAD RESTANDO.

$$y = -x + x + z = z.$$

b) SI $x + y = x \Rightarrow y = 0$

ES EL CASO PARTICULAR DE a) CUANDO $z = 0$.

c) SI $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

CLARO, COMO EN a) SUMAMOS $-x$ Y ASÍ

$$-x + x + y = -x + 0$$

LUEGO $0 + y = -x$; $y = -x$.

d) $-(-x)$ EL OPUESTO DE $(-x)$ ES x

CLARO $x + (-x) = 0 = (-x) + x$, LUEGO POR DEFINICIÓN DE OPUESTO, EL OPUESTO DE $(-x)$, $-(-x)$ ES x.

EL OPUESTO SIEMPRE ES ÚNICO, YA QUE SI $x + y = 1$ Y $x + z = 1$ POR a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$

HOJA 1.

PROBLEMA 3:

PROPIEDADES DEL PRODUCTO.

OBSERVEMOS QUE SON ANÁLOGAS A LAS DE LA SUMA Y SE PRUEBAN DE FORMA ANÁLOGA USANDO LAS CORRESPONDIENTES PROPIEDADES DEL PRODUCTO

a) $xy = xz$ y $x \neq 0 \Rightarrow y = z$

MULTIPLICAMOS POR EL INVERSO DE x

$$x^{-1} x y = x^{-1} x z$$

APLICANDO LA PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$(x^{-1} x) y = (x^{-1} x) z \quad , \text{ ASÍ}$$

$$1 y = 1 z \quad \text{y como } 1 \text{ es el elemento}$$

NEUTRO DEL PRODUCTO

$$y = z$$

O TAMBIÉN COMO $x \neq 0$ $\quad xy = xz = y = \frac{xz}{x} = z.$

b) SI $xy = x \underset{x \neq 0}{\Longrightarrow} y = 1.$ CLARO, TOMAR EN a) $z = 1$

c) SI $xy = 1$ MULTIPLICAMOS POR x^{-1}, EXISTE YA QUE $x = 0$, $\quad x^{-1} x y = x^{-1} 1$ y ASÍ

$$y = x^{-1}$$

d) $(x^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$ CLARO

$x(x^{-1}) = (x^{-1}) x = 1$, ASÍ POR DEFINICIÓN DE INVERSO DE UN NÚMERO $(x^{-1})^{-1} = x$

¿EL INVERSO DE UN NÚMERO SIEMPRE ES ÚNICO ¿POR QUÉ? (INV. RAZONA COMO EN LA SUMA)

HOJA 1:

PROBLEMA 3:) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

a) $0x = 0$ EL 0 ES EL ELEMENTO NEUTRO DE LA SUMA. EN PRINCIPIO EN LOS AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES NO APARECE QUE $0x = 0$

DEM $0x = y$, COMO $0+0 = 0$

$(0+0)x = y$

ASÍ $0x = (0+0)x$ USANDO LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA $0x = 0x + 0x$

Y USANDO LAS PROPIEDADES DE LA SUMA

$0x = 0$

$(\cancel{0x} + 0x = \cancel{0x}$ y $0x = 0.)$

b) SI $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$

SI $x \neq 0$, EXISTE x^{-1} Y ASÍ SI

$xy = 0$, SE TIENE QUE $x^{-1}x\,y = \underbrace{0x^{-1}}_{\text{USANDO a)}}$

LUEGO $y = 0$, LO CUAL NO ES CIERTO YA QUE POR HIPÓTESIS $y \neq 0$. POR TANTO NUESTRA SUPOSICIÓN $xy = 0$ ES FALSA $xy \neq 0$

c) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$

1: IGUALDAD $xy + (-(xy)) = 0$ POR DEFINICIÓN DE OPUESTO

AHORA $xy + (-x)y \underset{\text{PROP. DISTRIBUTIVA}}{=} (x + (-x))y = 0y = 0$

LUEGO COMO EL OPUESTO ES ÚNICO $-(xy) = (-x)y$

2: IGUALDAD: DE FORMA ANÁLOGA SE PRUEBA QUE $-(xy) = x(-y)$ ¡INTÉNTALO!

d) $(-x)(-y) = xy$

$-(xy) + (-x)(-y) \underset{\text{c) 1: IGUALDAD}}{=} (-x)y + (-x)(-y) \underset{\text{PROP DISTRIB.}}{=} (-x)(y + (-y)) = 0$

LUEGO $(-x)(-y)$ ES EL OPUESTO DE $-(xy)$, POR TANTO xy.

Hoja 1ª

PROBLEMA 3: PROPIEDADES DEL ORDEN.

a) Si $x > 0$, entonces $(-x) < 0$

Si $x > 0$ sumando $-x$

$$x + (-x) > 0 + (-x) \Rightarrow 0 > -x.$$

b) Si $x < 0$ e $y < z \Rightarrow yx > zx$

Si $x < 0 \Rightarrow (-x) > 0$ luego

$$(-x)y < (-x)z$$

o lo que es lo mismo (ver propiedad anterior)

$$-(xy) < -(xz)$$

Ahora sumamos xy

$$xy - (xy) < xy - (xz)$$

$$0 < xy - (xz)$$

sumando xz

$$\boxed{xz < xy - (xz) + (xz) = xy}$$

c) Si $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

Si $x > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0x \Leftrightarrow x^2 > 0$

Si $x < 0 \Rightarrow (-x)^2 = (-x)(-x) = x \cdot x = x^2 > 0$

Como $1^2 = 1$ y $1 > 0$, así $1 > 0$.

d) Si $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

$0 < x < y$ multiplicando por $\frac{1}{y}$ (> 0; claro

si $y > 0$ $y \cdot \frac{1}{y} = 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} > 0$)

$0 < \frac{x}{y} < 1$ multiplicando por $\frac{1}{x} > 0$

$$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

HOJA 1:

PROBLEMA 4: HACEMOS $12,2 + 3,19 + 4,12 =$

USANDO LA PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$= (12,2 + 3,19) + 4,12 = (15,39) + 4,12$$

$$\underset{\text{LA MÁQUINA REDONDEA}}{=} 15,3 + 4,12 = 19,42 \underset{\text{LA MÁQUINA REDONDEA}}{=} 19,4$$

O TAMBIÉN PODRÍA SER IGUAL A

$$= 12,2 + (3,19 + 4,12) = 12,2 + (7,31) =$$

$$= 19,51 \underset{\text{LA MÁQUINA REDONDEA}}{=} 19,5$$

OBVIAMENTE $19,4 \neq 19,5$.

PROBLEMA 5: LAS AFIRMACIONES SIGUIENTES SON ÚTILES EN LA PRÁCTICA CUANDO SE OPERA CON EXPRESIONES DE NÚMEROS REALES (Ó RACIONALES)

1) SI $ax = a$ CON $a \neq 0 \Rightarrow x = 1$

ESCRITO DE OTRA FORMA YA ESTÁ PROBADO EN EL EJERCICIO 2

2) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

CLARO $(x+y)(x+y) \underset{\text{PROP. DISTRIBUTIVA}}{=} x(x+y) + y(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 =$

$$\underset{\text{PROPIEDAD CONMUTATIVA}}{=} x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + xy(1+1) + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

3) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

CLARO $(x+y)(x-y) \underset{\text{PROP. DISTRIB.}}{=} x(x-y) + y(x-y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} - y^2 =$

$$= x^2 - y^2$$

4) SI $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ O BIEN $x = -y$.

SI $x = 0$, ES CLARO QUE $y = 0$

SI $x \neq 0$ $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} (x+y)(x-y) = 0$

PARA QUE ESTO OCURRA O BIEN $x+y = 0 \Rightarrow x = -y$

O BIEN $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

HOJA 1:

PROBLEMA 5:

5) ESTA LA ECUACIÓN DE 2º GRADO

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a\neq 0$$

VAMOS A RESOLVER ESTA ECUACIÓN, USANDO LAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES.

$$ax^2+bx+c=0$$

SUPONGAMOS $a>0$ (EN OTRO CASO ESCRIBIMOS $(-a)x^2+(-b)x+(-c)=0$ Y PROCEDEMOS IGUAL)

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\,\frac{b}{2\sqrt{a}}\,x+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+c =$$

$$= \left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} = \boxed{0}$$

USANDO LA PARTE 2) DE ESTE PROBLEMA

ASÍ RESULTA QUE

$$\left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

AHORA SI $\frac{b^2-4ac}{4a}\geq 0$ (EN OTRO CASO HAY QUE USAR NÚMEROS COMPLEJOS QUE SE VERÁN EN ALGEBRA)

$$\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}\,x=\frac{-b}{2\sqrt{a}}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

FÓRMULA QUE CONVIENE RECORDAR.

HOJA 1:

PROBLEMA 6 | LAS EXPRESIONES MATEMÁTICAS CONVIENE ESCRIBIRLAS LO MÁS SIMPLE POSIBLE

1) $$\frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x+a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}} = x+a$$

PROBLEMA 5

2) $$\frac{x^2+2ax+a^2}{x+a} = \frac{(x+a)^2}{x+a} = (x+a)$$

3) $$\frac{x^3-a^3}{x-a} = x^2+ax+a^2$$

DIVIDIMOS x^3-a^3 ENTRE $x-a$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - a^3 & x-a \\ \hline -x^3+ax^2 & x^2+ax+a^2 \\ \quad ax^2 - a^3 & \\ \quad -ax^2+a^2x & \\ \qquad a^2x - a^3 & \\ \qquad -a^2x+a^3 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

— o —

PROBLEMA 7: $0 < a < b$

• — $$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} \iff 4a^2b^2 < (a+b)^2 ab = a^3b+2a^2b^2+b^3a$$

$$\iff 4ab < a^2+2ab+b^2$$

$a \cdot b > 0$

$$\iff \boxed{0 < a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2}$$

ESTA ÚLTIMA EXPRESIÓN ES CIERTA. VOLVIENDO HACIA ATRÁS LLEGAMOS A NUESTRA DESIGUALDAD

• — $$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \iff ab < \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\iff 4ab < (a+b)^2$$

$$\iff \boxed{0 < a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2}$$

• — $$\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff \frac{(a+b)^2}{4} < \frac{a^2+b^2}{2} \iff$$

$$\iff (a+b)^2 < 2a^2+2b^2$$

$$\iff a^2+2ab+b^2 < 2a^2+2b^2$$

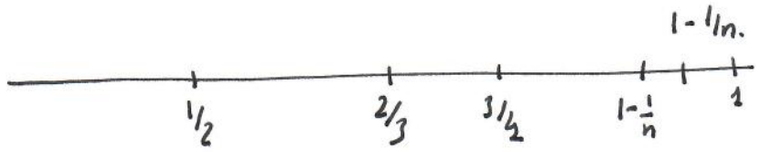
$$\iff \boxed{0 < a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2}$$

CIERTO, VOLVIENDO HACIA ATRÁS.

HOJA 1:

PROBLEMA 8:

1) $A = \{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} = \{ 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, \dots, 1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1} \dots \}$



OBSERVEMOS QUE $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ YA QUE A 1 LE "QUITAMOS" (RESTAMOS) UN NÚMERO MENOR.

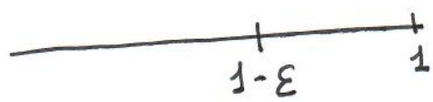
COMO $\frac{1}{2} \in A$ Y $1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

TENEMOS QUE $1/2 = \min A$.

POR OTRO LADO $1 - \frac{1}{n} < 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1 ES UNA COTA SUPERIOR DE A.

SEA $\varepsilon > 0$



COMO $0 = \inf \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$. (VER TEORÍA)

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ CON $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ LUEGO

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_0} < 1 \quad \text{Y} \quad 1 - \frac{1}{n_0} \in A,$$

LUEGO NO EXISTE UNA COTA SUPERIOR DE A MENOR QUE 1, POR TANTO

$$\sup A = 1.$$

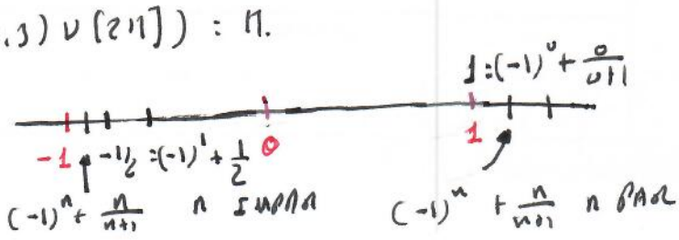
2) $[1,3) \cup (2,\pi]$ COMO $3 < \pi$ Y $1 < 2$

$[1,3) \cup (2,\pi] = [1,\pi]$

CLARAMENTE $\min([1,3) \cup (2,\pi]) = 1$

$\max([1,3) \cup (2,\pi]) = \pi.$

3) $\{ (-1)^n + \frac{n}{n+1} ; n \in \mathbb{N} \}$



HOJA 1:

PROBLEMA 9: EJEMPLOS DE INECUACIONES.

CON LAS PROPIEDADES DEL ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES TENEMOS QUE DESPEJAR LA x.

1) $-5(2-x) < 15$

COMO $-5 < 0$ $\quad (2-x) > -3$

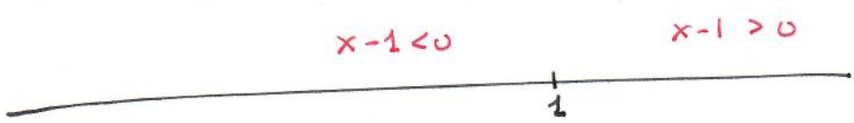
ASÍ $\quad -x > -5$

Y CAMBIANDO EL SIGNO $\boxed{x < 5.}$

ASÍ SI x ES MENOR QUE CINCO Y SOLO EN ESTE CASO ES VERDAD QUE $-5(2-x) < 15$.

2) $x^2 - 1 < 0$

$(x^2-1) = (x+1)(x-1) < 0$, POR TANTO $x+1$ Y $x-1$ TIENEN QUE TENER DISTINTOS SIGNOS.

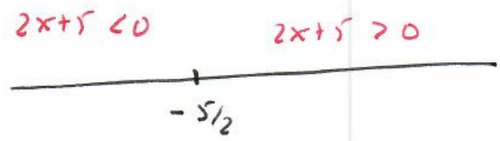


LUEGO SI $-1 < x < 1$ TENDREMOS Y SOLO TENDREMOS $x+1$ Y $x-1$ SON DE SIGNOS DISTINTOS

$$\boxed{x \in (-1, 1)}$$

3) $\dfrac{x+3}{2x+5} \geq 3$

COMO $2x+5 = 0 \iff x = -5/2$



SI $x > -5/2$ $\quad x+3 \geq 3(2x+5) = 6x+15 \iff -12 \geq 5x$

Y ASÍ $-\dfrac{12}{5} \geq x$

$x > -5/2$ Y $-12/5 \geq x \Rightarrow x \in \left(-5/2, -\dfrac{12}{5}\right]$. (1)

SI $x < -5/2$ $\quad x+3 \leq 3(2x+5) = 6x+15 \iff -12 \leq 5x$

$\iff -12/5 \leq x$

LUEGO $x < -5/2$ (2)

(1) Y (2) NOS DICE QUE $x \in \left(-\infty, -\dfrac{12}{5}\right] \setminus \{-5/2\}$.

HOJA 1:

PROBLEMA 4:

6) $x^2 - 4 \geq |2x+4|$

$2x+4<0$ $\qquad$ $2x+4>0$

-2

— SI $2x+4 \geq 0$ TENEMOS $x^2-4 \geq 2(x+2)$.

ASÍ $(x+2)(x-2) \geq 2(x+2)$.

$2x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$, LUEGO $x+2 \geq 0$

ASI $x-2 \geq 2 \Rightarrow x \geq 4$

ASI $x \geq -2$ Y $x \geq 4 \Rightarrow \boxed{x \in [4, \infty)}$

— SI $2x+4<0$ TENEMOS $x^2-4 \geq 2(-x-2) = -2(x+2)$

ASÍ $(x+2)(x-2) \geq -2(x+2)$.

$2x+4<0 \Rightarrow x<-2$, LUEGO $x+2<0$

Y ASI $(x-2) \leq -2 \Rightarrow x \leq 0$

ASÍ $x<-2$ Y $x \leq 0$ IMPLICA $\boxed{x<-2.}$

LUEGO $\boxed{x \in (-\infty, -2) \cup [4, \infty)}$

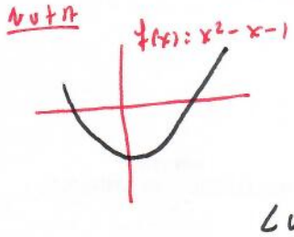
8) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

$0 < \sqrt{1+x}$ IMPLICA QUE $x \geq -1$; Y $\sqrt{1+x} < 1+\frac{1}{x} \Rightarrow x \neq -1$.

TOMANDO CUADRADO:

$(1+x) < \frac{(x+1)^2}{x^2}$

NOTA



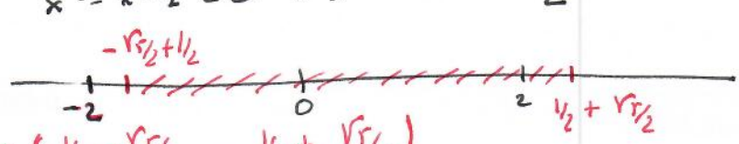
$0 < \sqrt{1+x}$

CUANDO $1+x>0$, SE TIENE QUE $1 < \frac{x+1}{x^2}$

LUEGO $x^2 - x - 1 < 0$

IGUALANDO A CERO $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} =$

$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

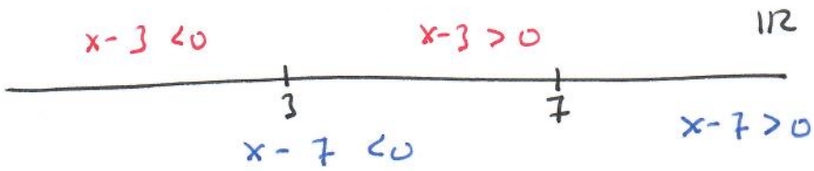


$x \in (1/2 - \sqrt{5}/2, \ 1/2 + \sqrt{5}/2)$

Hoja 1:

PROBLEMA 10:

a) $|x-3| + |x-7| = 2$



tenemos 3 posibilidades

si $x < 3$

$-x+3-x+7 = 2 \Rightarrow -2x = -8 \Rightarrow x = 4$ no es posible

si $x \in [3,7]$

$\cancel{x}-3-\cancel{x}+7 = 2 \iff 4 = 2$ no es posible

si $x > 7$

$x-3+x-7 = 2 \iff 2x-10 = 2 \iff x = 6$ no es posible

esta ecuación no tiene solución

$|x-3| + |x-7| = 4$ procedemos como en el caso anterior

si $x < 3 \Rightarrow x = 3$ no es posible

$\boxed{\text{si } x \in [3,7]}$ $\Rightarrow 4 = 4$ luego todo $x \in [3,7]$ es solución

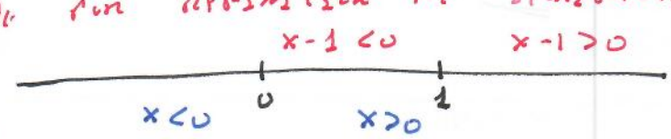
si $x > 7 \Rightarrow x = 7$ no es posible

esta ecuación tiene por solución todo el intervalo $[3,7]$.

b) 2) $\{x \in IR : |x-1| < |x|\} \underset{(a)}{=} \{x \in IR : x > 1/2\} \underset{(b)}{=} (1/2, \infty)$

(b) es evidente por definición de semirrecta

$|x-1| < |x|$



si $x < 0$, $1-\cancel{x} < -\cancel{x} \iff 1 < 0$ no es posible

si $x \in [0,1]$ $1-x < x \iff 1 < 2x \Rightarrow 1/2 < x \Rightarrow x \in (1/2, 1]$

y

si $x > 1$ $x-1 < x \iff -1 < 0$ siempre es cierto $\Rightarrow x > 1$

HOJA 1:

PROBLEMA 11: $y = 2x + |2 - x|$.

$2 - x \geq 0$ $\quad$ $2 - x \leq 0$

2

SI $x \geq 2$, $\quad y = 2x - 2 + x = -2 + 3x$

Y ASI $x = \dfrac{y+2}{3}$

SI $x < 2$ $\quad y = 2x + 2 - x = 2 + x$

Y ASÍ $x = y - 2$

LUEGO
$$x = \begin{cases} \dfrac{y+2}{3} & \text{SI } x \geq 2 \\ y - 2 & \text{SI } x < 2 \end{cases}$$

SI $x \geq 2$ $\quad y = -2 + 3x \Rightarrow y \geq 4$.

SI $x < 2$ $\quad y = 2 + x \Rightarrow y < 4$

LUEGO NOS QUEDA LA FUNCIÓN DE x EN RELACIÓN A y

$$x = \begin{cases} \dfrac{y+2}{3} & \text{SI } y \geq 4 \\ y - 2 & \text{SI } y < 4. \end{cases}$$

HOJA 1:

PROBLEMA 14: A)

TENEMOS $A_0 \subseteq A$ CON $A_0 \neq \emptyset$ ACOTADO

EXISTEN POR TANTO $\inf A_0 \leq \sup A_0$

SI EXISTE $\inf A = \alpha$, ENTONCES

$\alpha \leq a \quad \forall a \in A$, EN PARTICULAR

α ES UNA COTA INFERIOR DE A_0 Y COMO

$\inf A_0$ ES LA MAYOR DE SUS COTAS INFERIORES

$$\inf A \leq \inf A_0$$

DE FORMA ANÁLOGA PODEMOS QUE

$$\sup A_0 \leq \sup A.$$

13) a) $\sup A+B = \sup A + \sup B$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall a \in A & a \leq \sup A \\ \forall b \in B & b \leq \sup B \end{array}\right\} \Rightarrow a+b \leq \sup A + \sup B \quad \forall a+b \in A+B$$

LUEGO $\sup A + \sup B$ ES UNA COTA SUPERIOR DE $A+B$

Y POR DEFINICIÓN DE SUPREMO

$$\boxed{\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B} \quad (*)$$

POR OTRO LADO PARA TODO $\varepsilon/2 > 0$ SE TIENE

$a_0 \in A$ TAL QUE $\sup A - \varepsilon/2 \leq a_0$

(SI AL SUPREMO $\sup A$, CE QUESTAMOS ALGO $\sup A - \varepsilon/2$ YA NO ES COTA SUPERIOR)

Y $b_0 \in B$ TAL QUE $\sup B - \varepsilon/2 \leq b_0$

LUEGO $\sup A + \sup B - \varepsilon \leq a_0 + b_0 \leq \sup(A+B)$. Y JUNTO CON (*), ENTONCES POR EL EJERCICIO 13

$$\sup A + \sup B = \sup(A+B)$$

b) PRUEBA DE FORMA ANÁLOGA QUE $\inf A + \inf B = \inf(A+B)$

HOJA 1:

PROBLEMA 14: B

c) ES MÁS SENCILLO QUE EL APARTADO d)

d) $\inf \alpha A = \alpha \sup A$ SI $\alpha < 0$

$\forall a \in A$ $\quad a \leq \sup A$, POR SER EL SUPREMO UNA COTA SUPERIOR.

MULTIPLICANDO POR $\alpha < 0$

$$\alpha a \geq \alpha \sup A \quad \forall \alpha a \in \alpha A.$$

LUEGO $\alpha \sup A$ ES UNA COTA INFERIOR DE αA

POR TANTO $\inf \alpha A \geq \alpha \sup A$.

SEA β UNA COTA INFERIOR DE αA

$$\beta \leq \alpha a \quad \forall a \in A.$$

LUEGO COMO $\frac{1}{\alpha} < 0$

$$\frac{1}{\alpha} \beta \geq a \quad \forall a A$$

ASÍ $\frac{1}{\alpha} \beta$ ES UNA COTA SUPERIOR DE A Y

POR TANTO $\sup A \leq \frac{1}{\alpha} \beta$

MULTIPLICANDO POR $\alpha < 0$, $\alpha \sup A \geq \beta$

LUEGO $\alpha \sup A$ ES LA MAYOR DE LAS COTAS INFERIORES DE αA POR TANTO

$$\inf \alpha A = \alpha \sup A$$

DE FORMA ANÁLOGA PRUEBA QUE

$$\sup \alpha A = \alpha \inf A$$

Hoja 1:

PROBLEMA 14:) c) α cota superior de A

a) α cota superior de A y $\alpha \in A$

Luego $a \leq \alpha \quad \forall a \in A$

y si β es cota superior de A, en particular

$\alpha \leq \beta$ ya que $\alpha \in A$.

Luego α es la menor de las cotas superiores de A, por definición

$\alpha = \sup A$

b) $\alpha = \sup A \iff \forall r > 0 \quad \exists a \in A$ con $\alpha - r < a$

$\Rightarrow$) Si $\alpha = \sup A$, es la menor de las cotas superiores, luego si $r > 0$ $\alpha - r < \alpha$, $\alpha - r$ no es cota superior de A, luego $\exists a \in A$ tal que

$\alpha - r < a$.

$\Leftarrow$) Sea $\beta < \alpha$ ass $\beta = \alpha - (\alpha - \beta)$.

$r = \alpha - \beta > 0$ y $\exists a \in A$ tal que

$\beta < a$.

Luego β no es cota superior de A.

Por hipótesis α es cota superior de A y por lo de arriba es la menor de ellas por tanto $\alpha = \sup A$.

De forma análoga puede probarse que si β es cota inferior de A, entonces son equivalentes

1) $\beta = \inf A$

2) $\forall r > 0 \quad \exists a \in A$ tal que $a < \beta + r$.

HOJA 1:

PROBLEMA 15:

1) $A = \{3, 3'3, 3'33, \dots\}$

OBSERVEMOS QUE

$$3 < 3'3 < 3'33 < 3'333 < \dots$$

3 ES COTA INFERIOR Y COMO $3 \in A$, SE TIENE QUE

$$3 = \inf A$$

(COMO $3 \in A$, $3 = \min A$ MÍNIMO)

POR OTRO LADO

$$3'333\dots \leq 3'4$$

$3'4$ ES UNA COTA SUPERIOR DE A.

AHORA BIEN $3'\overline{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ TAMBIÉN ES

COTA SUPERIOR

$$3'333\dots \leq 3'\overline{3} = \frac{10}{3} < 3'4$$

VEAMOS QUE ES EL SUPREMO. SEA $\beta < 3'3$ SU FORMA

Y SEA $\beta = n, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

DECIMAL. ENTONCES

$$n \leq 3$$
$$a_1 \leq 3$$
$$\vdots$$
$$a_n \leq 3 \quad \forall n.$$

LUEGO EXISTE n_0 ASÍ QUE PARA n_0 TAL QUE

$n < 3$ (EN ESTE CASO $\beta < 3$

O $a_{n_0} < 3$ (EN ESTE CASO $\beta < 3, 3 \dots \underbrace{3}_{n_0 - \text{VECES}}$

LUEGO β NO ES COTA SUPERIOR DE A.

ASÍ $3'\overline{3}$ ES LA MENOR DE LAS COTAS SUPERIORES

HOJA 1:

PROBLEMA 18:

4) $A = \{0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots : a_{2k} = 1 \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} =$

$= \{0, a_1 1 a_3 1 \ldots a_{2k-1} 1 \ldots \} =$

$= \{0, a_1 0 a_3 0 \ldots 0 a_{2k-1} 0 \} + \{0,0101 01 \ldots\}$

$\sup A = 0,\overline{10} + 0,\overline{01}$ JUSTIFICA ESTA ULTIMO USANDO LA PARTE 1) Y USANDO EL EJERCICIO 14 B a).