CÁLCULO

1. Los Números Reales.

1.1. A) Encuentra el número más pequeño de los siguientes conjuntos de números naturales: 1) $A = \{2n : n \geq 5\}$ 2) $\{2k^2 + 7 \ : 8 \geq k \geq 2\}$
¿Cuál es el elemento más grande en cada conjunto?

B) Observa el subconjunto de números racionales $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. ¿En este subconjunto existe un elemento que es el más pequeño de todos? ¿Existe alguno que sea el más grande?

1.2. Demuestra por inducción que:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, si $r \neq 1$. 4) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

5) Sea un número $0 < x_0 < 1$ y se define la secuencia de números $x_n = x_{n-1}\dfrac{n}{n+1}$ para $n \geq 1$. Prueba que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Las siguientes propiedades de las operaciones con números reales (o racionales) son ciertas y se deducen de los axiomas de **cuerpo ordenado**. Intenta probarlas:
Usando las propiedades de la suma: a) si $x + y = x + z$, entonces $y = z$ b) si $x + y = x$, entonces $y = 0$ c) si $x + y = 0$, entonces $y = -x$ d) $-(-x) = x$.
Usando las propiedades del producto: en todos los casos si $x \neq 0$, a) si $xy = xz$, entonces $y = z$ b) si $xy = x$, entonces $y = 1$ c) si $xy = 1$, entonces $y = \frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.
Usando la propiedad distributiva: a) $0x = 0$ b) Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, entonces $xy \neq 0$. c) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ d) $(-x)(-y) = xy$.
Usando las propiedades del orden: a) si $x > 0$, entonces $(-x) < 0$ b) si $x < 0$ e $y < z$, entonces $xy > xz$. c) si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$ y en particular $1 > 0$. d) si $0 < x < y$, entonces $0 < 1/y < 1/x$.

1.4. Una máquina trabaja solo con números de tres cifras y es capaz de introducir una coma entre las cifras. Muestra que la máquina **no** respeta la propiedad **asociativa** de la suma (**Indicación:** considera tres números como $12,2$; $3,19$ y $4,12$. Utiliza que el redondeo se hace eliminando el último decimal).

1.5. Demuestra lo siguiente:
∗ 1) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.
2) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 3) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.
4) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o bien $x = -y$.
5) Si $ax^2 + bx + c = 0$ y $a \neq 0$, prueba que $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ¿siempre?

1.6. Simplifica las siguientes expresiones:

$$1)\ \frac{x^2 - a^2}{x - a} \qquad 2)\ \frac{x^2 + 2ax + a^2}{x + a} \qquad 3)\ \frac{x^3 - a^3}{x - a}.$$

1.7. Si $0 < a < b$ son dos números reales, prueba que las siguientes desigualdades son ciertas:

$$\frac{2ab}{a + b} < \sqrt{ab} < \frac{a + b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

∗ significa, problema propio del grupo.

1.8. Dibuja los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$. Cálcula supremos, ínfimos, máximos y mínimos de cada conjunto, en caso de que existan.
1) $\{1-1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ 2) $[1,3)\bigcup(2,\pi]$ 3) $\{(-1)^n + \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\}$.

1.9. Halla todos los números reales x que satisfacen, en cada caso, las siguientes relaciones:
1) $-5(2-x) < 15$ 2) $x^2 - 1 < 0$ 3) $\dfrac{x+3}{2x+5} \geq 3$

4) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ 5) $(x - \sqrt[3]{2})(x-\sqrt{2}) > 0$

6) $x^2 - 4 \geq |2x+4|$ 7) $\dfrac{1-2x}{x+2} \leq 3$ 8) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{x}$

9) $x^3(x^6 - 62)(x+3)^2 < 0$ 10) $\dfrac{1-2x}{x+2} \leq 3$

1.10. a) Resuelve las ecuaciones: $|x-3|+|x-7| = 2$, $|x-3|+|x-7| = 4$, $||3-x|-|x|| = |x|+1$, y $|2-|x|| = 2+|x|$

b) Prueba que:
1) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ |2x+3| < 6\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -9/2 < x < 3/2\} = (-9/2, 3/2)$
2) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-1| < |x|\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 1/2\} = (1/2, \infty)$.
3) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x(x-4)| < |x-4| - |x| \} = (2-\sqrt{8}, 3-\sqrt{5})$.

1.11. En la ecuación $y = 2x + |2-x|$, despeja x en función de la y.

$*$ **1.12.** Si $x > 0$, prueba que entonces es cierto que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

$*$ **1.13.** Si $a \leq b$ y para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $a \leq b \leq a + \epsilon$, prueba que $a = b$. Del mismo modo prueba que si para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $b - \epsilon \leq a \leq b$, entonces $a = b$.

$*$ **1.14. Propiedades de los supremos e ínfimos. A)** Sea A un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Sea $A_0 \subseteq A$ con $A_0 \neq \emptyset$. Prueba que A_0 está acotado y que:

$$\inf A \leq \inf A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A$$

B) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definen los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b \quad \text{donde} \quad a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$$

y

$$\alpha A = \{x \in \mathbb{R} : x = \alpha a \quad \text{donde} \quad a \in A\}$$

Prueba que:
a) $\sup A + B = \sup A + \sup B$ b) $\inf A + B = \inf A + \inf B$.
c) $\inf \alpha A = \alpha \inf A$ y $\sup \alpha A = \alpha \sup A$ siempre que $\alpha > 0$.
d) $\inf \alpha A = \alpha \sup A$ y $\sup \alpha A = \alpha \inf A$ siempre que $\alpha < 0$.

C) Sea α una cota superior de $A \subset \mathbb{R}$.
a) Prueba que si $\alpha \in A$, entonces $\alpha = \sup A$.
b) Prueba que $\alpha = \sup A$ es equivalente a decir que para todo número $r > 0$ existe $a \in A$ de modo que $\alpha - r \leq a$.

1.15. Calcula cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos (si existen) de los siguientes conjuntos:
1) $\{3, 3'3, 3'33, 3'333, ...\}$ 2) $[3, \dfrac{25}{3}]\bigcap(\dfrac{5}{4}, 8]$ 3)$\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - \frac{1}{r}, \text{ con } r > 0\}$.
4) $A \subset \mathbb{R}$ de modo que si $x \in A$ y su forma decimal es $x = 0, a_1 a_2 a_3 .... a_n ...$ se tiene que $a_{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.