ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DE LOS NATURALES A LOS REALES.

Los números Naturales $\mathbb{N}$. Los números naturales los escribimos con diez dígitos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., 8, 9, 10, ..., 87, 88, ..., n, n+1, (n+1)+1, ...\}.$$

Los podemos dibujar como "saltos" de igual longitud a partir de un inicio:

Figura 1. Los números naturales.

Sabemos sumar y multiplicar en $\mathbb{N}$. Además existe un orden natural que nos permite decir cuál de entre dos números es el mayor.

Otras propiedades de $\mathbb{N}$. En adelante, usaremos la notación usual conjuntista. Para más detalles ver el apéndice sobre **Teoría de Conjuntos.**

Teorema. 1. ***(Principio de Buena Ordenación)****. Sea B un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, $\quad B \subseteq \mathbb{N}$ con $B \neq \emptyset$. Existe el* ***mínimo*** *de B, es decir existe $n_0 \in B$ de modo que $n_0 \leq n$ para cualquier otro elemento $n \in B$. Notaremos $n_0 = \min B$.*

Demostración: Como B es no vacío, existe al menos un elemento $m \in B$. Sea n_0 el elemento más pequeño del conjunto $\{0, 1, 2, ..., m-1, m\}$ que además pertenezca a B. Este $n_0 = \min B \quad \square$

Esta propiedad que parece tan ingenua solo la tienen los números naturales.

Ejemplo. 1. *Sea $A \subset \mathbb{Q}$ dado por $A = \{\frac{1}{n} \quad : \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. No existe el* $\min A$. *Es más, no existe ningún número racional mayor que cero, $0 < \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ de modo que $\quad \frac{p}{q} \leq \frac{1}{n} \quad$ para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.*

Demostración: La demostración de este hecho es muy sencilla. Si $0 < \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, podemos suponer que p y q son ambos positivos. Así $\frac{1}{q+1} < \frac{p}{q}$. Claro $q < (q+1)p$. Por otro lado, observemos que $0 \notin A$ $\square$

El teorema anterior nos permite demostrar un importante resultado de divisibilidad.

Teorema. 2. *(* ***del Resto****). Sean $m, n \in \mathbb{N}$, con $n \neq 0$. Entonces existen $c, r \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$m = cn + r \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{cc} m & |\underline{m} \\ r & c \end{array} ;$$

con $r < n$.

Demostración: Es la división como siempre la hemos conocido. Veamos que podemos dar una demostración. Definimos el subconjunto

$$B = \{s \in \mathbb{N} \quad : \quad sn > m\}.$$

B es no vacío, ya que $(m+1)n > m$. Así $m+1 \in B$ y por el Principio de Buena Ordenación existe $\min B \neq 0$. Ahora definimos:

$$c = \min B - 1 \qquad \text{y} \qquad r = m - cn.$$

Como $c \notin B$, entonces $cn \leq m$ y por tanto $r \geq 0$. Por la definicón de r es claro que $m = cn + r$. Además, como $c + 1 = \min B \in B$

$$r = m - cn < (c+1)n - cn = n$$

$\square$

El Teorema del Resto es esencial para entender el algoritmo de Euclides o la aritmética modular. Ambos son temas propios de un curso de Matemática Discreta.

La siguiente propiedad de los números naturales es la clave de un proceso usual de demostración (**Demostración por Inducción**).

Teorema. 3. ***(Principio de Inducción)****. Sea un subconjuto B de $\mathbb{N}$ no vacio. Si*

- *$n_0 = \min B$, y*
- *para todo $n \in B$ se tiene que $n+1 \in B$,*

entonces $B = \{m \in \mathbb{N} \quad : \quad m \geq n_0\}$.

Demostración: Por ser B no vacío, existe $\min B$, según el Principio de Buena Ordenación. A este mínimo lo llamamos $n_0 \in B$. Por la hipótesis,

$n_0+1 \in B$ y $(n_0+1)+1 = n_0+2 \in B$ ...etc. Vemos así que el conjunto B son todos los naturales mayores o iguales a n_0 $\square$

Ejemplos. 1. *Veamos que las siguientes fórmulas son ciertas.*

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, *para todo* $n \geq 1$;
- *Dado* $0 < r \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} r^k = \frac{r^{n_0} - r^{n+1}}{1-r}$, *para todo* $n \geq n_0 \geq 0$.

Demostración: Vamos con la primera de las fórmulas. En ella sumamos los n primeros números naturales no nulos. Definimos

$$B = \{n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \quad : \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1}{2}\}.$$

Vemos que $1 \in B$. Claro $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$, luego se verifica la fórmula. Ahora tomamos $n \in B$. Nos preguntamos si $n+1$ también pertenece a B, es decir si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Veamos, usando que $n \in B$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Efectivamente, hemos comprobado que $n+1 \in B$. Lo que nos dice el Principio de Inducción es que $B = \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Así probamos que esta fórmula es cierta para todo n natural no nulo.

Para ver la segunda fórmula, fijamos un natural $n_0 \geq 0$. Si $n = n_0$, vemos que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n_0} r^k = r^{n_0} = \frac{r^{n_0} - r^{n_0+1}}{1-r} = \frac{r^{n_0}(1-r)}{1-r}$. Si suponemos que para $n \geq n_0$ se verifica la fórmula, intentemos ver si se cumple para $n+1$.

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} r^k = \sum_{k=n_0}^{n} r^k + r^{n+1} = \frac{r^{n_0} - r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1}$$

$$= \frac{r^{n_0} - r^{n+1} + (1-r)r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^{n_0} - r^{n+2}}{1-r}.$$

Luego el Principio de Inducción nos dice que la fórmula se verifica para todo $n \geq n_0$. Además la fórmula es cierta independientemente del natural n_0 que hayamos fijado al inicio. $\square$

Observemos que $\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$. O que, en el caso particular de que $r = \frac{1}{2}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^n = \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n.$$

Los números enteros $\mathbb{Z}$. Los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{...., -n-1, -n, ..., -28, -27, ..., -1, 0, 1, 2, ..., m, m+1, ...\},$$

se construyen a partir de las números naturales. En $\mathbb{Z}$ podemos sumar, multiplicar y **restar**. $\mathbb{Z}$ está **totalmente ordenado**, es decir dados dos enteros podemos decir cuál de ambos es el mayor. Además $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Observación. 1. *Una ecuación como* $x+5=0$ *tiene solución en* $\mathbb{Z}$, $x=-5$, *por que podemos restar. No tiene solución en* $\mathbb{N}$. *Sin embargo el conjunto* $B = \{-2n \quad : \quad n \in \mathbb{N}\}$ *no tiene un mínimo.* $\mathbb{Z}$ *no satisface el principio de buena ordenación.*

Los números racionales $\mathbb{Q}$. Una ecuación como $3x+1=0$, no tiene solución en $\mathbb{Z}$, ya que no siempre podemos dividir (división exacta) dos enteros entre si. Para resolver este tipo de ecuaciones necesitamos otros números. Estos son los racionales, las fracciones o los quebrados:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \quad : \quad p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}.$$

Los números racionales los construimos a partir de los enteros. Recordemos algunas de sus propiedades:

Igualdad de racionales: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$ si y solo si $pq' = p'q$.

Suma: $\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s} = \dfrac{ps+qr}{qs}$.

Producto: $\dfrac{p}{q}\dfrac{r}{s} = \dfrac{pr}{qs}$

Orden:
- $\dfrac{p}{q} \geq 0$ si y solo si $pq \geq 0$.
- $\dfrac{p}{q} \geq \dfrac{p'}{q'}$ si y solo si $\dfrac{p}{q} - \dfrac{p'}{q'} \geq 0$.

En $\mathbb{Q}$ podemos sumar, restar, multiplicar y dividir. Además $\mathbb{Q}$ está totalmente ordenado, es decir dados dos elementos de $\mathbb{Q}$ podemos decidir cuál de ambos es el mayor. Además con la identificadión de $m \in \mathbb{Z}$ con $m = \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$, podemos escribir

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Ahora es fácil enterder que $x = -\frac{1}{3}$ es la solución de la ecuación $3x+1=0$, que no tiene solución en $\mathbb{Z}$.

Forma decimal de un número racional. Consideramos un número racional $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $pq \geq 0$. Teniendo en cuenta el Teorema del Resto, si dividimos p entre q sacando al menos $q+1$ decimales:

$$
\begin{array}{ll}
p & \underline{|q\quad\quad} \\
\quad r_1 & d, a_1a_2....a_k....a_l....a_qa_{q+1} \\
\quad\; r_2 & \\
\quad\;\; \ddots & \\
\quad\quad r_k & \\
\quad\quad \ddots & \\
\quad\quad\; r_l & \\
\quad\quad\; \ddots & \\
\quad\quad\quad r_q & \\
\quad\quad\quad r_{q+1} &
\end{array}
$$

Así tendremos una **parte entera** d y $q+1$ decimales $a_i \in \{0,1,2,...,8,9\}$, $i = 1,2,3...,q,q+1$. Los restos correspondiente a cada decimal son $r_1, r_2, ..., r_{q+1}$ y cada uno de ellos verifica que $0 \leq r_i < q, \;\; i = 1,2,3...,q,q+1$. Pueden ocurrir tres cosas

Parte decimal finita: Si hay un primer resto $r_k = 0$, entonces $\dfrac{p}{q} = d, a_1a_2...a_{k-1}00000.... = d, a_1a_2...a_{k-1}$.

Parte decimal periódica: Si ningún resto es nulo, como hay $q+1$ restos todos menores que q al menos dos se repiten (**Principio del palomar).** Supongamos que $r_1 = r_k$, entonces

$$\frac{p}{q} = d, a_1a_2...a_{k-1}a_1a_2...a_{k-1}a_1.... = d, a_1\widehat{a_2...a_k}_{-1}.$$

Parte decimal mixta: Si ningún resto es nulo, como hay $q+1$ restos todos menores que q al menos dos se repiten (**Principio del palomar).** Supongamos que $r_k = r_l$, entonces

$$\frac{p}{q} = d, a_1a_2...a_{k-1}a_ka_{k+1}...a_{l-1}a_k....a_{l-1}a_k...$$

$$= d, a_1a_2...a_{k-1}\; a_ka\widehat{_{k+1}...a}_{l-1}.$$

Ejemplos. 2. *Sin más que dividir:* $\dfrac{1}{2} = 0,5; \quad \dfrac{20}{3} = 6,\widehat{6} \quad$ *y* $\quad \dfrac{201}{90} = 2,2\,\widehat{3}.$

Los números racionales se pueden escribir en **forma decimal** con parte decimal periódica (finita, pura o mixta). El recíproco tambien es cierto. Si tomamos un número r de la forma:

$$r = d, a_1a_2...a_{k-1}\; a_ka\widehat{_{k+1}...a}_{l-1},$$

tenemos que

$$r10^{l-1} - r10^{k-1} = da_1a_2...a_{k-1}a_ka_{k+1}...a_{l-1},\; a\widehat{_k....a}_{l-1} - da_1a_2...a_{k-1},\; a_ka\widehat{_{k+1}...a}_{l-1}$$

$$= da_1a_2...a_{k-1}a_ka_{k+1}...a_{l-1} \ - \ da_1a_2...a_{k-1},$$

despejando r

$$r = \frac{da_1a_2...a_{k-1}a_ka_{k+1}...a_{l-1}, - da_1a_2...a_{k-1}}{10^{l-1} - 10^{k-1}};$$

luego r es una fracción, pertenece a $\mathbb{Q}$. Con lo anterior hemos probado que

Teorema. 4. *Los números racionales son aquellos que tienen desarrollo decimal periódico (ya sea finito, puro o mixto).*

Observación. 2. *Un ordenador escribe números enteros con dos dígitos (**sistema binario**) y es capaz de intercalar una coma. Luego un ordenador solo trabaja con números racionales con una cantidad finita de decimales.*

Otros números. Los números que conocemos, naturales y racionales podemos representarlos sobre una recta:

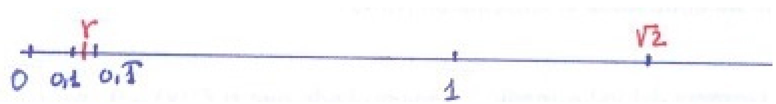

Figura 2. La recta de los números.

El número $\sqrt{2}$ como sabemos está sobre la recta anterior. Pero no es un racional (la ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$).

El número $r = 0,1010010001000010000010......$ tiene parte decimal infinita pero no periódica $(0,1 < r < 0,\widehat{1} = \frac{1}{9})$. r está sobre la recta de números, pero tampoco es un número racional.

Los dos números anteriores son ejemplos de números reales. A diferencia de los racionales no disponemos de una forma explícita sencilla de escribir estos números. Podríamos definirlos como:

- los puntos de una recta; o
- los número con parte entera y parte decimal, periódica o no.

Con alguna de estas dos definiciones, el problema surge al tratar de definir las operaciones y el orden sobre estos números. Este es el motivo por el que vamos a seguir otro camino para definir los números reales $\mathbb{R}$. Lo haremos de modo axiomático. Diremos que $\mathbb{R}$ es un conjunto de números que satisface tales propiedades. Después podremos comprobar que efectivamente son los punto de una recta o que son también todos los números con parte entera y parte decimal.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es