ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES.

Los números reales los presentamos como un conjunto $\mathbb{R}$ (que contiene a los racionales $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) con dos operaciones (una suma y un producto) y un orden con ciertas propiedades.

Definición. 1. *Llamaremos conjunto de los números reales y notaremos* $\mathbb{R}$, *a todo conjunto que tenga las siguientes características. Para cualesquiera* $x, y, z \in \mathbb{R}$:

A: *Una operación* ***SUMA*** $\left(\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \rightarrow & x + y \end{array} \right)$. *Con las propiedades:*

- ***Asociativa:*** $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- ***Conmutativa:*** $x + y = y + x$.
- ***Elemento Neutro:*** *existe un elemento que notaremos* $0 \in \mathbb{R}$, *tal que* $x + 0 = 0 + x = x$.
- ***Elemento Opuesto:*** *para todo número* x *existe otro que notaremos* $-x \in \mathbb{R}$, *tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

B: *Una operación* ***PRODUCTO*** $\left(\begin{array}{cccc} \times : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \rightarrow & x \times y = xy \end{array} \right)$. *Con las propiedades:*

- ***Asociativa:*** $(xy)z = x(yz)$.
- ***Conmutativa:*** $xy = yx$.
- ***Elemento Neutro:*** *existe un elemento que notaremos* $1 \in \mathbb{R}$, *tal que* $x1 = 1x = x$.
- ***Elemento Inverso:*** *para todo número* x *no nulo existe otro que notaremos* $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, *tal que* $x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1$.

C: *Una propiedad* ***DISTRIBUTIVA*** *del producto con respecto a la suma:* $x(y + z) = xy + xz$.

D: ***UN ORDEN COMPLETO COMPATIBLE CON LAS OPERACIONES,*** *es decir*

- *dados dos números x, y entonces o bien x es mayor o igual a y, $y \leq x$ o bien $x \leq y$;*
- *si $y \leq z$, entonces $x + y \leq x + z$;*
- *si $y \leq z$ y $x \geq 0$, entonces $xy \leq xz$;*

E: ***INCLUSIÓN DE*** $\mathbb{Q}$. *Se verifica que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*

F: ***LA PROPIEDAD DEL EXTREMO SUPERIOR.*** *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente tiene un* ***supremo,*** *es decir*

- *si $A \subset \mathbb{R}$ de modo que existe $M \in \mathbb{R}$ con $a \leq M$, para todo $a \in A$ (M* ***cota superior*** *de A), entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades*

1. *α es cota superior de A*
2. *para cualquier M cota superior de A se verifica que $\alpha \leq M$. Escribimos $\alpha = \sup A$, el* ***supremo*** *de A.*

Definición. 2. *Un conjunto con las propiedades* ***A,B,C*** *y* ***D*** *se le llama un* ***cuerpo ordenado.***

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado. Las propiedades de la suma, producto y orden anteriores son las habituales de los números que conocemos. La formalidad con la que se presentan no deben intimidarnos. Veamos algunos ejemplos de como ya sabemos utilizarlas.

Ejemplos. 1.

- *Supongamos que $ax + b = 0$, donde a y b son números conocidos y x es una incógnita. Entonces:*

$$ax + b + (-b) = (-b) \quad \Leftrightarrow \quad ax + 0 = -b; \quad \textit{si además} \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(-b) \quad \Leftrightarrow \quad 1x = \frac{-b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b}{a}.$$

  Es decir hemos despejado la x. Para ello hemos usado las propiedades de existencia de elementos opuestos e inversos; así como la existencia de elementos neutros tanto para la suma como para el producto.

- *Si $x > 0$, entonces $-x < 0$. Para ver esto, sumamos $-x$ en la primera desigualdad y así*

$$x + (-x) > -x \quad \Leftrightarrow \quad 0 > -x,$$

  según las propiedades del orden respecto de la suma.

- *$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$. La propiedad distributiva y la conmutativa con respecto a la suma y el producto nos permiten alcanzar tal desarrollo.*

- *De la misma manera* $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$. *Y* $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$.
- *La expresión* $\dfrac{x^2 + 2ax + a^2}{x+a}$ *puede ser simplificada ya que es igual a*

$$\frac{(x+a)^2}{x+a} = x + a.$$

Observación. 1. *A partir de* $\mathbb{Q}$ *se puede hacer una construcción de los números* $\mathbb{R}$*. Es compleja y está fuera de nuestra alcance. Ver el apéndice* ***Construcción de los números reales,*** *para tener una idea de la misma.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es