

EXAMEN Elem. de E.D.O. 22 de Septiembre 2020.

Nombre y apellidos:.....

1.- (2 punto) Resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} x'(t) &= \frac{3t - 2x(t)}{Kt} \\ x(1) &= 1 \end{cases}$$

Presencial $K = -1$

2.- Se sabe que Kt^2e^t , $t(Kte^t - e^t)$ y $Ke^t(t^2 + 1)$ son tres soluciones de una E.D.O. lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

a) (1 punto) Calcula la solución de la E.D.O. que verifica $x(0) = 7$ y $x'(0) = 0$.

b) (1 punto) ¿Cuál es la ecuación concreta de esta E.D.O.?

Presencial $K = 1$

3.- (2 punto) Sea $x'(t) = Ax(t)$ un sistema lineal con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se sabe que al menos $\lambda = K$, $\lambda = 0$ y $\lambda = -K$ son autovalores de la matriz A . Demuestra que al menos existen tres soluciones x , y y z de modo que

- $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$;
- y está acotada;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

Presencial $K = 1$

4.- (2 punto) Se consideran las funciones de una variable: $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx}$, con $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$. Prueba que estas funciones son linealmente independientes.

5.- (2 punto) Representa el diagrama de fases del sistema plano
 $\lambda_1 < \lambda_2 < K$. Justifica tu dibujo.

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x \\ y' &= \lambda_2 y \end{aligned} \quad \text{con}$$

Presencial $K = 0$

EJERCICIO 1) PARA $k = -1$

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{3t - 2x(t)}{t} \\ x(1) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'(t) = \frac{3t - 2x(t)}{-t} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

En este caso $x'(t) = -3 + \frac{2}{t} x(t)$ es una EDO

LINEAL no homogénea

PROBLEMA HOMOGÉNEO: $x'(t) = \frac{2}{t} x(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{2}{t} \quad \text{Integramos en } t$$

$$\ln |x(t)| = 2 \ln t + k$$

$$|x(t)| = e^{\ln t^2 + k} = e^k t^2$$

$$\text{Luego } x(t) = k t^2 \quad k \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA NO HOMOGÉNEO: Buscamos una solución

$$\text{particular } y_0(t) = k(t) t^2$$

$$y_0'(t) = k'(t) t^2 + k(t) 2t$$

$$\text{Introducimos en la EDO } k'(t) t^2 + k(t) 2t = -3 + \frac{2}{t} k(t) t^2$$

$$\text{Así } k'(t) = \frac{-3}{t^2} \quad \text{Integramos } k(t) = \frac{3}{t}$$

$$\text{Solución General: } x(t) = \frac{3}{t} t^2 + k t^2 = 3t + k t^2$$

Para encontrar: como buscamos la solución que

$$x(1) = 1, \quad \text{entonces que } x(1) = 3 + k$$

$$\text{Así } 3 + k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = -2$$

La solución es entonces la solución particular de la EDO

$$\text{es } x(t) = 3t - 2t^2$$

PROBLEM 2: $t^2 e^t, t(te^t - e^t), e^t(t^2 + 1) \in S'$

S' consists of all solutions of the homogeneous linear ODE $y'' - 2y' + y = 0$. Since the characteristic equation $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ has a double root $\lambda = 1$, the general solution is $y = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

$$t(te^t - e^t) - t^2 e^t = -t e^t$$

$$y = e^t(t^2 + 1) - t^2 e^t = e^t$$

Since the solutions of the homogeneous ODE are e^t and $t e^t$, the particular solution $y = e^t$ is linearly independent from the homogeneous solutions.

$$y(t) = k_1 e^t + k_2 t e^t + t^2 e^t \text{ is the general solution of the inhomogeneous ODE.}$$

A) SS $x(0) = 7$ (initial condition) $k_1 = 7$
 Also $x'(t) = 7e^t + k_2 e^t + k_2 t e^t + 2t e^t + t^2 e^t$

SS $0 = x'(0) = 7 + k_2$ (also $k_2 = -7$)

The solution is $\boxed{x(t) = 7e^t - 7te^t + t^2 e^t}$

B) $ax'' + bx' + cx = f(t)$ i.e. $y'' - 2y' + y = f(t)$

Since the characteristic equation $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ has a double root $\lambda = 1$, the homogeneous solutions are e^t and $t e^t$.

Assume $ax^2 + bx + c = (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

For $\lambda = 1$, $x'' - 2x' + x = f(t)$

Since $t^2 e^t$ is a solution, it satisfies the equation:
 $(t^2 e^t)'' - 2(t^2 e^t)' + (t^2 e^t) = 2e^t$
 $+ [2te^t + 2te^t + 2te^t + t^2 e^t] = 2e^t$

Ass $\boxed{x'' - 2x' + x = 2e^t}$

PROBLEMA 3: $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$

Señalar la existencia de una solución en la forma $x(t) = e^{\lambda t} v$ para $\lambda = 1, 0, -1$

$$v_1 \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Av_1 = v_1 \quad \lambda = 1$$

$$v_2 \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Av_2 = 0 \quad \lambda = 0$$

$$v_3 \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Av_3 = -v_3 \quad \lambda = -1$$

Señalar que (solo hay que comprobarlo en la forma de la ecuación $x' = Ax$)

Que $x(t) = e^t v_1$ es una solución

$$x'(t) = e^t v_1 = e^t A v_1 = A e^t v_1 = A x(t)$$

$\downarrow$
 v_1 autovector.

y como $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t |v_1| = \infty$

$\downarrow$
 $|v_1| \neq 0$

Que $y(t) = v_2$ es una solución constante; que

ya que $Av_2 = 0$

es la solución constante. Esta es la forma

Que $z(t) = e^{-t} v_3$ es una solución

$$(e^{-t} v_3)' = -e^{-t} v_3 = e^{-t} (-v_3) = e^{-t} A v_3 = A e^{-t} v_3$$

$\downarrow$
 v_3 autovector para $\lambda = -1$.

y como $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} v_3 = 0$.

4
 $\bullet$ — $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$ $k_i \neq k_j \quad i \neq j$

pon successu subat n

$n=2$ $e^{k_1 x} \neq 0$

$n \neq 2$ $\lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x} = 0$ $\text{cu } \lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 \neq 0$

asi $e^{k_1 x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{k_2 x}$

$y \quad 1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(k_2 - k_1)x}$ $k_2 - k_1 \neq 0$ y $\text{cu } k_1 \neq k_2$

lubi $e^{(k_2 - k_1)x} \equiv \text{ct}$ $\text{cu } k_2 - k_1 \neq 0$

m is posibil lubi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

subur gam cu $e^{k_1 x}, \dots, e^{k_{n-1} x}$ su succesiv

y cu $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ cu $\lambda_n \neq 0$ ta cu

$\lambda_1 e^{k_1 x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{k_{n-1} x} + \lambda_n e^{k_n x} = 0$

asi $e^{k_n x} = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} e^{k_i x}$

m fapt cu λ_i propr sta ct cu si si psi
 $e^{k_n x} \equiv 0$ cu val nu e sta lubi fapt

ascris $1 = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} e^{(k_i - k_n)x}$

cu $k_i - k_n$ m nu e sta nu sta sta

$(k_i - k_n = k_j - k_n \Leftrightarrow k_i = k_j)$

nu sta $0 = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} (k_i - k_n) e^{(k_i - k_n)x}$

cu $k_i - k_n \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ y m fapt cu

$-\frac{\lambda_i}{\lambda_n}$ su nu e sta sta sta sta sta sta

cu la si sta sta sta sta sta sta

§ 5.2.1

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist eine von Matrizen formale

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

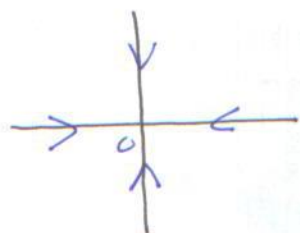
also eine Lösung ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

also eine Lösung ist $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$
 $y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$

also

- wenn λ_1 positiv ist, $P_1 = (1, 0)$ ist ein Vektor $\propto e^{\lambda_1 t} (1, 0)$
 - wenn λ_2 positiv ist, $P_2 = (0, 1)$ ist ein Vektor $\propto e^{\lambda_2 t} (0, 1)$

- wenn λ_1 negativ ist, $P_1 = (1, 0)$ ist ein Vektor $\propto e^{\lambda_1 t} (1, 0)$
 - wenn λ_2 negativ ist, $P_2 = (0, 1)$ ist ein Vektor $\propto e^{\lambda_2 t} (0, 1)$



also eine Lösung ist $x' = 0$

also eine Lösung ist $y' = 0$

also eine Lösung ist $x = 0$
 also eine Lösung ist $y = 0$

also eine Lösung ist $\lambda_1 < 0$
 also eine Lösung ist $\lambda_2 < 0$

also eine Lösung ist

$$\frac{y'}{x'} = \frac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

also eine Lösung ist $\begin{cases} t \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty \end{cases}$

also eine Lösung ist

