HOJA 2.

PROBLEMA 1:

HEMOS VISTO EN TEORÍA QUE $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

LA SUCESIÓN $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\}$

LOS TÉRMINOS $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ Ó $a_4 = \frac{1}{4}$ SON MAYORES QUE $0,13$, PERO NO PUEDE HABER INFINITOS TÉRMINOS A LOS QUE LES PASE ESO YA QUE SI $\varepsilon = 0,13 > 0$ COMO $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, EXISTE UN n_0 TAL QUE

$\forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{1}{n}\right| < 0,13$.

SI $n_0 = 10^{-5}$ PARA TODO $n \geq n_0 = 10^{-5}$ SE TIENE QUE $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^{-5}} < 0,0000 4$.

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n+1} = 1$

ESCRIBIMOS $\left|1 - \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right| \underset{\text{OPERANDO}}{=} \left|\frac{\cancel{n^2}+n+\cancel{1}-\cancel{n^2}-\cancel{1}}{n^2+n+1}\right|$

$= \frac{n}{n^2+n+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

COMO SABEMOS QUE $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, DADO $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ TAL QUE $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ Y ASÍ $\left|1 - \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

LO QUE DEMUESTRA QUE EFECTIVAMENTE EL LÍMITE DE ARRIBA ES 1.

HOJA 2:

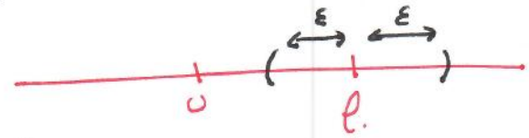
PROBLEMA 2: SABEMOS QUE EXISTE $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$.

PUEDE OCURRIR QUE $\ell > 0$

O BIEN $\ell < 0$

O BIEN $\ell = 0$

- SI $\ell > 0$, DIBUJAMOS



AHORA SI TOMAMOS $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ ENTONCES EXISTE UN n_0 TAL QUE $\forall n \geq n_0$ SE TIENE QUE

$$|\ell - x_n| < \frac{\ell}{2} \iff$$

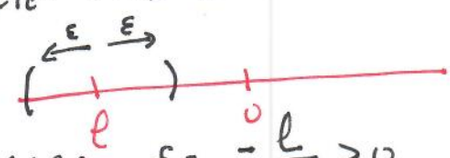
$$-\frac{\ell}{2} < \ell - x_n < \ell/2 \iff$$

$$-\frac{3\ell}{2} < -x_n < -\ell/2 \iff$$

$$0 < \ell/2 < x_n < \frac{3\ell}{2}$$

LUEGO TODOS LOS TÉRMINOS DE LA SUCESIÓN A PARTIR DE n_0 SON POSITIVOS. ESTO NO PUEDE SER YA QUE NOS DICEN QUE LOS x_n SON ALTERNATIVAMENTE POSITIVOS Y NEGATIVOS

- SI $\ell < 0$, DIBUJAMOS



PROCEDIENDO COMO ANTES PARA $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$ (INTÉNTALO) SE VE QUE LOS x_n TIENEN QUE SER NEGATIVOS A PARTIR DE UN n_0, ESTO TAMPOCO ES POSIBLE

- LUEGO LA ÚNICA POSIBILIDAD QUE QUEDA ES QUE $\boxed{\ell = 0}$

- EJEMPLO $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}^{\infty} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

SUCESIÓN CON TÉRMINOS ALTERNADOS.

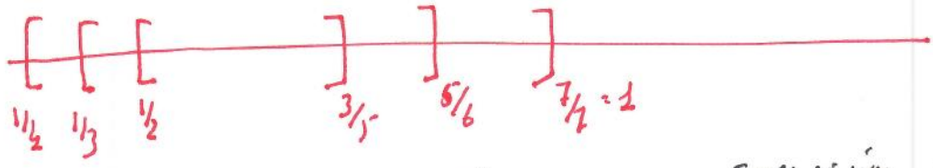
HOJA 2:

PROBLEMA 3:

a) $\bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n+3}\right] =$

$= \underset{n=2}{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]} \cup \underset{n=3}{\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]} \cup \underset{n=4}{\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{7}\right]} \cup \ldots\ldots$

SI DIBUJAMOS



OBSERVAMOS QUE $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ES UNA SUCESIÓN DECRECIENTE A 0; Y $\left(\frac{2n-1}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ ES UNA SUCESIÓN CRECIENTE A 2

CLARO $\frac{2n-1}{n+3} < \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+3}$ YA QUE

$(2n-1)(n+4) < (2n+1)(n+3)$ YA QUE

$\cancel{2n^2} + \cancel{7n} - 4 < \cancel{2n^2} + \cancel{7n} + 4$ EFECTIVAMENTE $-4 < 4$.

POR OTRO LADO $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n}{1+3/n} = 2.$

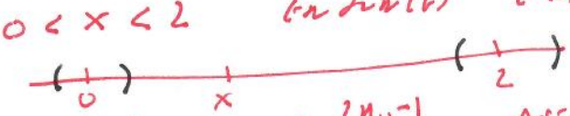
LUEGO VEMOS QUE $\bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n+3}\right] = (0, 2)$

CLARO, SI $x \leq 0 \Rightarrow x \notin \left[\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n+3}\right] \quad \forall n \geq 2$

SI $x \geq 2 \Rightarrow \frac{2n-1}{n+3} < 2 \leq x \quad \forall n \geq 2.$

LUEGO $x \notin \left[1/n, \frac{2n-1}{n+3}\right] \quad \forall n \geq 2.$

SI $0 < x < 2$ ENTONCES EXISTE



n_0 TAL QUE $\frac{1}{n_0} < x < \frac{2n_0-1}{n_0+3}$, ASÍ $x \in \left[\frac{1}{n_0}, \frac{2n_0-1}{n_0+3}\right]$.

EL ÍNFIMO DE LA UNIÓN ES 0 Y EL SUPREMO ES 2.

HOJA 2:

PROBLEMA 3:

c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2}{6n^2+2} , \frac{n^2}{3n^2+1} \right]$

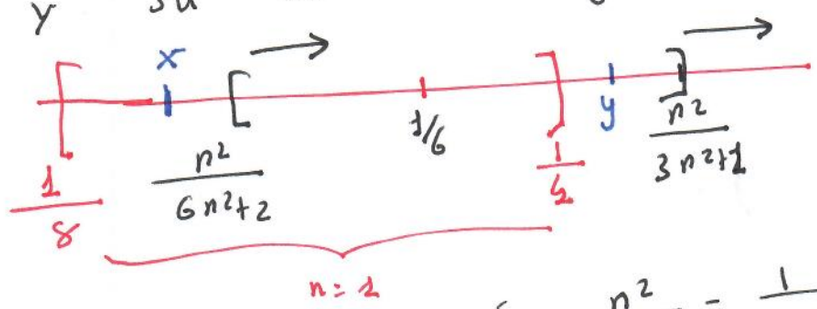
VAMOS A ESTUDIAR LAS SUCESIONES DE LOS EXTREMOS DE LOS INTERVALOS.

$$\left(\frac{n^2}{6n^2+2} \right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{6+\frac{2}{n^2}} \right)_{n=1}^{\infty}$$

COMO $\left(\frac{2}{n^2} \right)$ ES UNA SUCESIÓN DECRECIENTE

LA SUCESIÓN $\frac{1}{6+\frac{2}{n^2}}$ ES CRECIENTE. (DIVIDIMOS POR COSAS MÁS PEQUEÑAS, LUEGO CRECE EL COCIENTE)

Y SU LÍMITE ES $\frac{1}{6}$



POR LA MISMA RAZÓN $\frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3+\frac{1}{n^2}}$ ES CRECIENTE A $1/3$...

LA INTERSECCIÓN SON LOS NÚMEROS QUE PERTENECEN A TODOS LOS INTERVALOS POR TANTO

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2}{6n^2+2} , \frac{n^2}{3n^2+1} \right] = \left[1/6, \frac{1}{4} \right]$$

SI $x < 1/6$ $\exists n_0$ CON $x < \frac{n_0^2}{6n_0^2+2}$

SI $y > \frac{1}{4}$ $\exists n_1$ CON $y < \frac{n_1^2}{3n_1^2+1}$

POR ÚLTIMO EL MÍNIMO DE LA INTERSECCIÓN ES $1/6$ Y EL MÁXIMO DE LA INTERSECCIÓN ES $1/4$.

HOJA 2:

PROBLEMA 5:

a) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff$ DEFINICIÓN SI PARA TODO $N<0$ EXISTE n_0 TAL QUE SI $n \geq n_0$ ENTONCES $x_n < N$

DIBUJO

b) 1) $\lim_{n\to\infty} 3n+4 = \infty$ YA QUE

$$3n+4 > n \uparrow \infty$$

2) $\lim_{n\to\infty} -5n+8 = -\infty$ YA QUE

$$-5n+8 < -n \quad \text{SI } n>8$$
$$\downarrow$$
$$-\infty.$$

5) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n 3^n$ ES UNA SUCESIÓN ALTERNADA

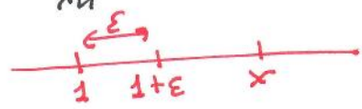
$-3, 3^2, -3^3, 3^4$ ... etc NO CONVERGE A NADA.

c) SI $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ DADO $\varepsilon>0$ TOMANDO $M=\frac{1}{\varepsilon}$

$\exists n_0$ TAL QUE PARA TODO $n \geq n_0$ $x_n \geq M$

LUEGO $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$. ASÍ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$

d) SI $x>1$



$$x^n > (1+\varepsilon)^n \geq 1+n\varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

LUEGO $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$

SI $0<x<1$ $\frac{1}{x}>1$ Y ASÍ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{n\to\infty} x^n = 0.$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

HOJA 2

PROBLEMA 2.6

EN ESTE PROBLEMA ABARCAN ALGUNOS "TRUCOS" USUALES PARA CALCULAR LÍMITES DE SUCESIONES CUANDO HAY INDETERMINACIÓN

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n} =$$

MULTIPLICANDO ARRIBA Y ABAJO POR EL CONJUGADO

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})}{n(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2-(\cancel{n^2}+1)}{n(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}} = 0$$

SUMA POR DIFERENCIA

3) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n^2}+2)-(\cancel{n^2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+n}} =$$

COMO ANTES

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{n^2+2}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+n^2}} = \frac{-1}{2}$$

EL NUMERADOR POR TENDER A -1

EL DENOMINADOR " A 2

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}-1}{2\sqrt{n}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sqrt{2n}-1}{2\sqrt{n}+2} = \dots$$

5) $$\underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{SUMANDO MAS GRANDE}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ SUMANDOS}} \le \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}$$

SUMANDO MAS PEQUEÑO

$\xrightarrow{n\to\infty} 1$

7) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ ¿POR QUÉ?

8) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+n}{n^2+1} = 0$ ¿POR QUÉ?

HOJA 2

PROBLEMA 7. LA SUCESION $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ ES CRECIENTE Y ACOTADA. SI NO TE LO CREES SIGUE LEYENDO, SI TE LO CREES PASA DIRECTAMENTE A ASUMIR QUE

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

DEM

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} =$$

BINOMIO DE NEWTON / $\binom{n}{k}$ NÚMERO COMBINATORIO, SE VEN EN MATEMÁTICA DISCRETA

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

PARA $n < n+1$ Y $1 \le k \le n$ SE TIENE QUE

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \geq$$

$$\geq 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) =$$

$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ LO QUE PRUEBA QUE LA SUCESIÓN ES CRECIENTE Y TOMA SUS TÉRMINOS MAYORES QUE 2.

AHORA

$$e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \le$$

$$\le 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

USAMOS QUE $k! > 2^{k-1}$ $k \geq 2$ (¡PRUEBAR POR INDUCCIÓN!)

$$= 2 + \frac{1/2 - \frac{1}{2^n}}{1-1/2} \le 2+1 = 3$$

EJERCICIO 2 HOJA 1

HEMOS PROBADO QUE LA SUCESIÓN ESTÁ ACOTADA Y QUE $2 < e < 3$.

HOJA 2

PROBLEMA 7.

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3+2}\right)^{\frac{n^3+3}{5}} =$$

USAMOS QUE $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3+2}\right)^{\frac{n^3+2}{5}+\frac{1}{5}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^3+2}\right)^{n^3+2}}_{e}\Bigg)^{1/5}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^3+2}\right)^{1/5}}_{1} = \sqrt[5]{e}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) = \frac{1}{e}$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{\left(n+3\cdot\frac{n}{3(n+3)}\right)} = \sqrt[3]{e}$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1-1}{n-1}\right)^{2n} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n-1}{n-2}}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n-2+1}{n-2}}\right)^{2n} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-2}}\right)^{(n-2)\cdot\frac{2n}{n-2}} = \frac{1}{e^2}$$

5) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n^2+2n-n}{n^2+2n}}\right)^{2n} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{2n}{n+1}} = e^2$$

HOJA 2:

PROBLEMA 8)

A) 2) $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$ con $x_1 > 1$

Como $\sqrt{1+a^2} > a$ para todo $a > 0$

es claro que la sucesión es creciente

Si la sucesión (x_n) fuese convergente, es decir si $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \sqrt{1+x_n^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{1+\ell^2} \end{array}$$

y así $\ell^2 = 1+\ell^2 \iff 0 = 1$!!

Llegamos a contradicción, luego la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ no está acotada y por tanto <u>no</u> es convergente.

B) 3) $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+6)$ $a_1 = 2$

Vemos que $a_2 = 4$ y $a_3 = 5$ ¿será creciente?

Si $a_{n-1} \leq a_n$ entonces

$a_{n-1}+6 \leq a_n + 6$ y

$\frac{1}{2}(a_{n-1}+6) = a_n \leq \frac{1}{2}(a_n+6) = a_{n+1}$

es creciente. Parece que $a_n \leq 6$ $\forall n$.

Veamoslo, $a_1 \leq 6$, si $a_n \leq 6$

entonces $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n+6) \leq \frac{1}{2}(6+6) = 6$

Luego por inducción está acotada por 6

Luego existe $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (por ser creciente y acotada)

Luego $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+6)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ a & = & \frac{1}{2}(a+6) \end{array} \iff \frac{1}{2}a = 3 \quad \text{Luego } \boxed{a = 6}$$

Límite.

HOJA 2:

PROBLEMA 8:

B 6) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$

EN EL EJERCICIO 1.12 VIMOS QUE $\frac{1}{x} + x \geq 2 \quad \forall x > 0$

LUEGO SI $x_0 > 0 \quad x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) \geq \frac{1}{2}\, 2 = 1$

EN GENERAL VEMOS QUE $x_{n+1} \geq 1$ SI $x_n > 0$

LA SUCESIÓN ESTÁ ACOTADA INFERIORMENTE

¿SERÁ UNA SUCESIÓN DECRECIENTE? ES DECIR, ¿OCURRE QUE $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \geq 1$?

VEAMOS

$$x_{n+1} = 1/2\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \overset{?}{\leq} x_n.$$

ORDENANDO $\frac{1}{2x_n} \leq \frac{1}{2} x_n \iff \frac{1}{x_n} \leq x_n$ COMO $x_n \geq 1$

LA DESIGUALDAD $\frac{1}{x_n} \leq x_n$ ES CIERTA. LUEGO LA SUCESIÓN ES DECRECIENTE.

ASÍ EXISTE $\lim_{n\to\infty} x_n = l \neq 0$, YA QUE $x_n \geq 1 \quad \forall n \geq 1$.

LUEGO

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & 1/2\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & 1/2\left(l + \frac{1}{l}\right) \end{array}$$

ORDENANDO $l^2 = 1/2\, l^2 + \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} l^2 = \frac{1}{2}$ ASÍ $\underline{l = 1}$

HOJA 2

PROBLEMA 9:

a) $a_1 = 1$ y $a_n = 4n + a_{n-1}$

b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente, ya que $a_1 = 1 < 4 \times 2 + a_1 = a_2$

y si $a_{n-1} < a_n \Rightarrow 4n + a_{n-1} < 4(n+1) + a_n$.

$\Leftrightarrow a_n < a_{n+1}$.

c) para $a_1 = 1$ $\quad |1 - 2 \times 1| < 2 \times 1$ cierto

suponiendo $|a_{n-1} - 2(n-1)^2| < 2(n-1)$

entonces $|a_n - 2n^2| = |a_{n-1} + 4n - 2((n-1)+1)^2| =$

$= |a_{n-1} + 4n - 2(n-1)^2 - 4(n-1) - 2| \leq$

$\leq |a_{n-1} - 2(n-1)^2 + 2| \leq 2(n-1) + 2 = 2n.$

d) $\left|1 - \frac{a_n}{2n^2}\right| = \left|\frac{2n^2 - a_n}{2n^2}\right| \leq \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

por tanto $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$

PROBLEMA 10:

$\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

sabemos que $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{2} + \quad + \frac{1}{n} - \ln n = C$

y que $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n = C$

luego $0 = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \quad + \frac{1}{2n} - \ln 2n\right) - \lim_{n \to \infty} \left(1 + \quad + \frac{1}{n} - \ln n\right) =$

$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \quad + \frac{1}{2n} - \ln 2n - 1 + \quad - \frac{1}{n} + \ln n\right) =$

$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \quad + \frac{1}{2n} + \ln n - \ln 2n\right) =$

$= \boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \quad + \frac{1}{2n} + \ln \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}}\right)}$ $\qquad \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

por tanto $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$

HOJA 2:

PROBLEMA 11: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2]{2}\,\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$

TOMAMOS LOGARITMOS (Y USANDO SUS PROPIEDADES)

$$\ln\left(\sqrt[2]{2}\,\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sqrt[2^k]{2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\ln 2 = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} =$$

$$= \ln 2 \, \frac{1/2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - 1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$$

EJERCICIO 2 HOJA 1

LUEGO EXISTE $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[2]{2}\,\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right) = \ln 2$

APLICANDO LA EXPONENCIAL (QUE ES UNA FUNCIÓN CONTINUA)

EXISTE $\lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)} = \underline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}} = e^{\ln 2} =$

$$= \underline{\underline{2}}$$