

CÁLCULO

2. Sucesiones y Series.

2.1. Usa la definición de límite de una sucesión para probar que:

$$\inf\{a_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = 0 \quad \text{implica que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

- ¿Puede existir algún n tal que $a_n > 0,13$?
- ¿E infinitos n tales que $a_n > 0,13$?
- ¿A partir de que n_0 todos los a_n , $n \geq n_0$, distan de cero menos que $0,0004$?

Usa la definición de límite de una sucesión para probar que:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} = 1$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n^2 + 1} = \frac{2}{3}$. Halla un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se tenga que $|\frac{n^2}{3n^2 + 1} - \frac{2}{3}| < 10^{-4}$.

2.2. De la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se sabe que es convergente y que sus términos son alternativamente positivos y negativos. ¿Cuál es su límite? Razona la respuesta. Pon un ejemplo.

Observación: Como indicación general, puede ser útil siempre que tengamos una sucesión, como las que aparecen a continuación, calcular sus primeros términos; ver si crecen o decrecen y determinar si la sucesión está acotada o no.

*** 2.3.** Determina como son los conjuntos siguientes y calcula los respectivos supremos e ínfimos si existen.

$$\text{a) } \bigcup_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n+3}] \quad \text{b) } \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{n^2}{6n^2+2}, \frac{n^2}{3n^2+1}] \quad \text{c) } \bigcap_{n=1}^{\infty} [\frac{n^2}{6n^2+2}, \frac{n^2}{3n^2+1}]$$

2.4. Sea $x \in \mathbb{R}$ cuya forma decimal es $x = r, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots$. Se considera la sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty} = (r, a_1 \dots a_k)_{k=1}^{\infty}$. Prueba que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

Comprueba que la sucesión $0,5 \quad 0,55 \quad 0,555, \dots$ converge a $\frac{5}{9}$.

2.5. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ se dice que converge a infinito ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$) si para todo $M > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n > M$.

a) ¿Qué significa entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$?

b) Determina el límite de las sucesiones: 1) $a_n = 3n + 4$ 2) $a_n = -5n + 8$ 3) $a_n = \sqrt{n}$ 4) $a_n = -3^n$ 5) $a_n = (-1)^n 3^n$

c) Prueba que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

d) Si $x > 1$, comprueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$. Deduce que si $x \in (0, 1)$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

e) Determina el límite de las sucesiones: 1) $a_n = (\frac{1}{2})^n$ 2) $a_n = (-1)^n (\frac{1}{2})^n$ 3) $a_n = (\frac{-1}{n})^5$

***** significa, problema propio del grupo.

2.6. Calcula los siguientes límites:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 7^{n+1}}{21^n}$ 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{n}$ 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+n}$
 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{2\sqrt{n}+2}$ 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(\sqrt{n^2+1})} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$
 * 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1} \right)$ 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$ 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$.

2.7. Se puede probar que la sucesión $((1 + 1/n)^n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada; por tanto convergente. Se define el número real e como:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Calcula los límites de las sucesiones siguientes:

- 1) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3+2} \right)^{\frac{n^3+3}{5}}$, 2) $b_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$.
 3) $((1 + \frac{1}{n+3})^{\frac{n}{3}})_{n=1}^{\infty}$ 4) $((1 - \frac{1}{n-1})^{2n})_{n=2}^{\infty}$ 5) $((\frac{n^2+2n}{n^2+n})^{2n})_{n=1}^{\infty}$.

2.8. Sucesiones recurrentes: A) Determina si las sucesiones siguientes son convergentes o no.

- 1) $a_{n+1} = a_n \frac{n}{n+5}$, con $a_1 = 5$. 2) $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$, con $x_1 > 1$.

B) Comprueba que las sucesiones siguientes son convergentes y calcula su límite.

- 3) $a_n = 1/2(a_{n-1} + 6)$, con $a_1 = 2$. 4) $x_{n+1} = \frac{1}{3-x_n}$ con $x_1 = 2$.
 5) $x_{n+1} = \frac{x_n^2+m}{2x_n}$ con $x_1 = m > 1$ (Verifica que estamos ante un algoritmo para calcular $\sqrt{m}$).
 * 6) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$, con $x_0 > 0$. (**Indicación:** usa el problema 1.12)

2.9. Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

- 1) con solo un dato de entrada resuelve el problema usando una instrucción.
 2) con n datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide: a) definir la sucesión recurrente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. b) Estudiar la monotonía y acotación de la misma. c) Probar por inducción que $|a_n - 2n^2| < 2n$ para todo n . d) Deducir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$.

* **2.10.** Sea sabe que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = C$. El límite C tiene nombre se llama constante de Euler. Usando lo anterior (y las propiedades del logaritmo) calcula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

* **2.11.** Calcula el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}$.

2.12. a) Calcula la suma de : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+5}}{3^{n+3}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+1} - 3^n}{17^n}$ y $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4^{n+2} - 7}{5^n}$.

* b) Expresa como fracciones los números decimales:

$$0,221111... \quad 0,121212.... \quad 4,45616161.....$$

(**Indicación:** en primer lugar, escríbelos en forma de serie).

2.13. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $a_n = b_n - b_{n+1}$.

* 1) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la sucesión (b_n) es convergente y se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

* 2) Prueba que para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede encontrar una sucesión (b_n) que verifica las condiciones del apartado anterior.

3) Aplica 1) al cálculo de la suma de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

2.14. Usando el criterio de comparación determina la convergencia de las series:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+7}{n^3+n+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}.$$

2.15. (Series alternadas) Determina si cada una de las series siguientes es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o ninguna de ambas cosas:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^k} \quad k > 0$ b) $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \dots$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2 + \cos(n\pi)}{n^2}$

2.16. Estudia la convergencia de las series:

* 1) $\sum_{n=21}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^a \quad a > 0$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 - \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^3}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \dots \times 3n}$

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k} \quad k > 0$ 9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p \ln n} \quad p > 0$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$.

11) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}, 0 < \theta < 2\pi$

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ * 18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3-1}$ 19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2 + \cos(n\pi)}{n^2}$.

* **2.17.** Sean las series: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} (-1)^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} (-1)^{k+1}$. Prueba que

todas son absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$. (**Se verá que:** e^x , $\cos x$ y $\sin x$ son las sumas, respectivamente, de las series anteriores).