MMI PRÁCTICA-4

Nombre y apellidos.....

1.-Calcula la suma (explícita) de las series:

1_1.-$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+5}}{3^{n+3}}$. (**Indicación:** Ajusta a una serie geométrica).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+5}}{3^{n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^5}{3^3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{32}{27}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{32}{27}\,\frac{\frac{2}{3}}{1-2/3} =$$

SERIE GEOMÉTRICA DE RAZÓN $2/3$

$$= \frac{32}{27}\cdot 2 = \frac{64}{27}.$$

1_2.-$\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2})$. (**Indicación:** Usa las propiedades del logaritmo, $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ y $\ln a^b = b \ln a$)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln(n^2-1) - \ln n^2\right) =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \ln((n+1)(n-1)) - 2\ln n = \sum_{n=2}^{\infty} \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - \ln n + \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - \ln n\right. =$$

$$= \lim_{N\to\infty} -\lg 2 + \ln N+1 - \ln N = -\lg 2 + \lim_{N\to\infty} \ln\frac{N+1}{N} = -\lg 2.$$

YA QUE $\frac{N+1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$ Y $\ln 1 = 0$.

2.- Estudia la convergencia de las series:

2_1.- $\sum_{n=21}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ (**Indicación:** Criterio de comparación).

$$\sum_{n=21}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \geq \sum_{n=21}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n^2} = \sum_{n=21}^{\infty} \frac{1}{n}$$

SERIE DIVERGENTE, POR TANTO LA SERIE $\sum \frac{n^2}{n^3+1}$ QUE ES MAYOR TAMBIÉN DIVERGE.

YA QUE $n^3+1 < n^3+n^2$

2_2.- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2-\text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^3}$ (**Indicación:** Criterio de comparación).

$$\left|2 - \text{sen}\frac{n\pi}{2}\right| \leq 2 + \left|\text{sen}\frac{n\pi}{2}\right| \leq 3. \text{ ASÍ}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{2-\text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^3}\right| \leq 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

SERIE CONVERGENTE.

POR TANTO LA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2-\text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^3}$ ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE Y POR TANTO CONVERGENTE.

2_3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ (**Indicación:** Criterio de comparación por ~~XXXX~~ cociente)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+1/n}}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1;$$ ASÍ POR EL CRITERIO DE COMPARACIÓN POR COCIENTE CONCLUIMOS QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ DIVERGE YA QUE LA SERIE ARMÓNICA DIVERGE.

2_4.- $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \ldots$

$$\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n};$$ COMO $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$ NO EXISTE ($\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$), EN TODO CASO NO ES NULO LA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$ NO ES CONVERGENTE

3.- Calcula el dominio de la función: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$ (**Indicación:** Hay que hallar las "x"para las cuáles la serie $f(x)$ es convergente. Aplica el critrio del cociente. Estudia los casos particulares donde el criterio no decida).

FIJAMOS $x \in \mathbb{R}$, VEAMOS SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{3n}$ CONVERGE O NO USANDO EL CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{3(n+1)}}{\frac{|x|^n}{3n}} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

ASÍ SI $|x| < 1$ LA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

SI $x > 1$ LA SERIE DIVERGE

PARA $x = 1$ (AQUÍ EL CRITERIO NO DECIDE) LA SERIE $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ ES DIVERGENTE; EN CAMBIO

PARA $x = -1$ (AQUÍ TAMPOCO DECIDE EL CRITERIO) LA SERIE $f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ CONVERGE POR EL CRITERIO DE LEIBNIZ

SI $x < -1$ LA SERIE DIVERGE YA QUE $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} \neq 0$ (SEA $|x| = 1+\delta$, ESTO $|x|^n = (1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^{n-k}$ ASÍ $\left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n} \geq \delta + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} \binom{n}{k} \frac{\delta^{n-k}}{n} > \delta$).