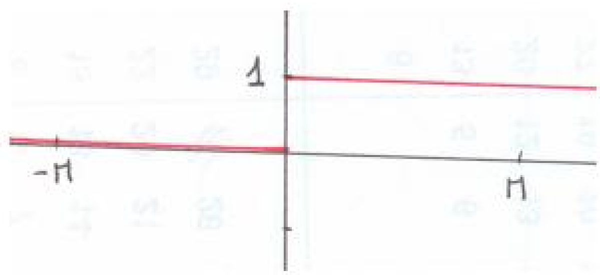
# AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

## EJEMPLOS DE SERIES DE FOURIER

**Ejemplo 1.** ***(La función de Heaviside)*** *Consideramos la función*




$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Queremos calcular su serie de Fourier sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$. Usando la definición de coeficientes de Fourier, vista anterioremente,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx = 0$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nxdx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\,\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}[-\cos n\pi + 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto la serie de Fourier de la función $f$ es la serie de funciones

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen}((2k+1)x).$$

**Observación 1.** *Para $x = 0$ la función anterior toma el valor $f(0) = 1$ (el límite por la izquierda de la función en cero es cero). Sin embargo el valor que alcanza su serie de Fourier en cero es*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}((2k+1)0) = \frac{1}{2}.$$

*Lo anterior prueba que la serie de Fourier no tiene por que coincidir con el valor de la función. ¿Y entonces para que este cálculo? Más adelante los teoremas de convergencia nos aclararán esta cuestión.*

Recordemos que una función real de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es ***par*** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se dice que es ***impar*** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El siguiente resultado es muy útil para calcular coeficientes de Fourier. Ahorra muchas cuentas.

**Lema 1.** *a) Sea una función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,*

1. *Si $f$ es **par** entonces*
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = 0, \qquad \textit{para todo} \qquad n \in \mathbb{N}.$$
2. *Si $f$ es **impar** entonces*
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \qquad \textit{para todo} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

*b) Sea una función $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to \mathbb{R}$,*

1. *Si $f$ es **par** entonces*
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T} nx) dx = 0, \qquad \textit{para todo} \qquad n \in \mathbb{N}.$$
2. *Si $f$ es **impar** entonces*
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\frac{2\pi}{T} nx) dx = 0, \qquad \textit{para todo} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

**Observamos** que la parte a) del Lema anterior es un caso particular del caso b) para $T = 2\pi$. Como veremos más adelante las igualdades de $a_n$ y $b_n$ en la parte b) son la forma de calcular coeficientes de Fourier para funciones definidas sobre un intervalo de longitud $T$. Además es fácil ver que la familia de funciones $\{\cos(\frac{2\pi}{T} nx), \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T} nx)\}_{n=0}^{\infty}$, sobre el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, es ortogonal.

*Demostración:* Veamos a)$_1$ y b)$_2$. El resto se prueba de forma análoga. Si $f$ es par sobre $[-\pi,\pi]$, entonces

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\operatorname{sen} nx dx.$$

Si en la segunda integral hacemos el cambio de variable $y = -x$ (y así $dy = -dx$), además teniendo en cuenta que $f$ es par, se tiene que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-y)\operatorname{sen}(-ny)(-1)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(y)\operatorname{sen}(ny)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)\operatorname{sen}(ny)dy = 0. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $f$ es impar sobre $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$, entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dx \\ &= \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dx + \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dx. \end{aligned}$$

Si en la segunda integral hacemos el cambio de variable $y = -x$ (y así $dy = -dx$), además teniendo en cuenta que $f$ es impar, se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dx + \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-y)\cos(-\frac{2\pi}{T}ny)(-1)dy \\ &= \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dx + \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(y)\cos(\frac{2\pi}{T}ny)dy \\ &= \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dx - \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(y)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dy = 0\Box \end{aligned}$$

Veamos en un ejemplo como se emplea el Lema anterior.

**Ejemplo 2.** *Se considera la función* $f(x) = |x|$ *sobre el intervalo* $[-\pi,\pi]$.

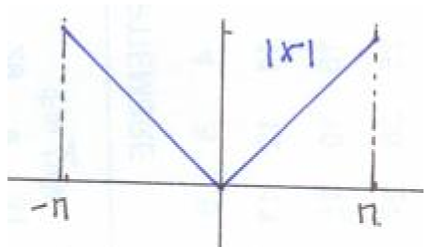



Figura 1. $f(x) = |x|$

Si queremos calcular la serie de Fourier de esta función, nos fijamos en que es par (e.d. $|-x| = |x|$)). **Puede ocurrir que la función en cuestión no sea impar ni tampoco par**, en ese caso el lema de arriba no nos sirve. En nuestro ejemplo por ser par sabemos que $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora solo queda calcular los otros coeficientes de Fourier.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$$

y

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos nxdx$$

integrando por partes, tenemos que

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}dx\right] = \frac{-2}{n\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nxdx$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{n^2\pi}[\cos n\pi - 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto la serie de Fourier de $f$ es

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi}\cos(2k+1)x.$$

## Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

*Email address*: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`