AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

RELACIONES ENTRE UNA FUNCIÓN Y SUS COEFICIENTES DE FOURIER.

Consideremos una familia de funciones ortogonal $\{\phi_n(t)\}_{n\geq 1}$ sobre un intervalo $[a,b]$. Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, sus coeficientes de Fourier con respecto a la familia ortogonal anterior están dados por:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)dx} \qquad \text{para todo} \qquad n \geq 1.$$

Observación 1. *Consideremos las sumas parciales* $S_N(t)=\sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n(t)$. *Queremos ver que números* $c_1, c_2, ...c_N$ *hacen más pequeña la expresión* $\int_a^b |f(t)-S_N(t)|^2dt$.

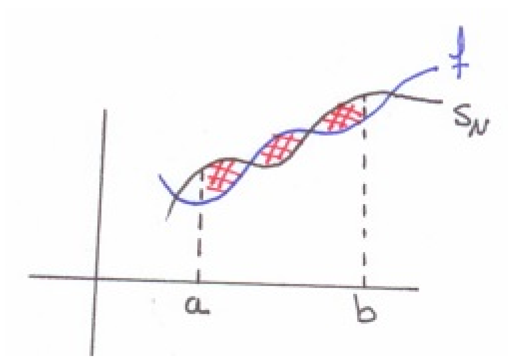

FIGURA 1. Aproximación en media cuadrática.

Queremos encontrar los coeficientes de S_N que hace que S_N se aproximen mejor a f en media cuadrática, es decir que minimicen el área entre sus gráficas.

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_a^b |f(t) - S_N(t)|^2 dt &= \int_a^b f^2(t) - 2f(t)S_N(t) + S_N^2(t) dt \\
\int_a^b f^2(t)dt - 2\sum_{n=1}^N c_n \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt &+ \sum_{n=1}^N c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(t)dt
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la ortogonalidad de la familia $\{\phi_n(t)\}_{n\geq 1}$ para conseguir el último sumando; además completando cuadrados conseguimos

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \int_a^b \phi^2(t)dt \left(c_n - \frac{\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt}{\int_a^b \phi_n^2(t)dt} \right)^2 \\
&+ \int_a^b f^2(t)dt - \sum_1^N \frac{\left(\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt\right)^2}{\int_a^b \phi_n^2(t)dt}.
\end{aligned}
$$

Esta última expresión toma el menor valor posible cuando

$$
c_n = \frac{\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt}{\int_a^b \phi_n^2(t)dt},
$$

es decir cuando los coeficientes c_n son los coeficientes de Fourier de la función f. Así las sumas parciales S_N aproximan mejor en media cuadrática a la función f cuando usamos de coeficientes los coeficientes de Fourier de la función. En este caso si $S_N(t) = \sum_{n=1}^N a_n\phi_n(t)$, entonces las fórmulas de arriban quedan de la forma

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_a^b |f(t) - S_N(t)|^2 dt &= \int_a^b f^2(t)dt - \sum_1^N \frac{\left(\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt\right)^2}{\int_a^b \phi_n^2(t)dt} \\
&= \int_a^b f^2(t)dt - \sum_1^N a_n^2 \int_a^b \phi_n^2(t)dt, \qquad \text{cierto para todo} \qquad N.
\end{aligned}
$$

De lo anterior se sigue la llamada ***DESIGUALDAD DE BESSEL***

$$\sum_1^\infty a_n^2 \int_a^b \phi_n^2(t)dt \le \int_a^b f^2(t)dt.$$

Si además pedimos que f sea de cuadrado integrable, es decir si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$, y podemos probar que $\displaystyle\int_a^b |f(t) - \sum_{n=1}^N a_n\phi_n(t)|^2 dt \to_{N\to\infty} 0$, entonces deducimos de las cuentas anteriores la llamada ***IDENTIDAD DE PARSEVAL***

$$\sum_1^\infty a_n^2 \int_a^b \phi_n^2(t)dt = \int_a^b f^2(t)dt.$$

Con un poco más de trabajo, se puede probar también que

Lema 1. ***Lema de Riemann-Lebesgue*** *Si f es una función de cuadrado integrable ($\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$), entonces la serie $\displaystyle\sum_1^\infty a_n^2 \int_a^b \phi_n^2(t)dt$ es convergente. Si además existe $M > 0$ de modo que $\displaystyle\int_a^b \phi_n^2(t)dt \ge M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ es convergente y por tanto* $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = 0$.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es