ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Los conceptos de recta ($\mathbb{R}$) y dar un corte en la misma (número real), son muy gráficos pero difíciles de manejar. Son más fáciles de usar los procesos discretos, aquellos que se pueden contar, enumerar. De aquí el origen de las sucesiones.

Definición. 1. *Se llama sucesión de números reales a toda aplicación de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccl} \varphi & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \to & \varphi(n) = \ x_n \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Notación: Usualmente una sucesión se denota por sus imágenes $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, una colección numerable de números reales ordenados de algún modo (las nociones conjuntistas de aplicación, dominio e imagen de una aplicación se pueden ver en el apéndice de Teoría de Conjuntos).

Ejemplos. 1.

- $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\}$
- $(\frac{33_{n-veces}\dots 3}{10^n})_{n=1}^{\infty} = \{0,3; 0,33; \dots 0,33_{n-veces}\dots 3; \dots\}$
- $(\sqrt[n]{2})_{n=1}^{\infty} = \{2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \dots, \sqrt[n]{2}, \dots\}$
- $x_0 = 2, \quad x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}}$, *para todo* $n \geq 1$ *(ejemplo de sucesión* ***recurrente****).*

Vimos que los término del segundo ejemplo se acercaban a $\frac{1}{3}$. Mientras que los del cuarto lo hacian a $\sqrt{2}$. El concepto principal unido a la noción de sucesión es el de **convergencia.**

Definición. 2. *Una sucesión de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *se dice que* ***converge*** *a un número* $x \in \mathbb{R}$ *o que el* ***límite*** *de la sucesión es* x *si ocurre lo siguiente:*

$$\textit{para todo} \quad \epsilon > 0 \quad \textit{existe} \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{de modo que para todo} \quad n \geq n_0$$

$$|x_n - x| \leq \epsilon.$$

Notación: Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{o} \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

y diremos que x es el **límite** de la sucesión. Lo que vemos en esta definición es que las distancias de los puntos de la sucesión al límite son cada vez más pequeñas.

Ejemplos. 2.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} 0,33_{n-veces}\dots 3 = \frac{1}{3}$

Demostración: Vimos que no existe ningún número real $\epsilon > 0$ que sea menor que todos los números de la forma $\frac{1}{n}$. Luego si $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Por tanto para todo $n \geq n_0$ (así $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$), se verifica que

$$|0 - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Lo que prueba que 0 es el límite de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$.

Para ver que $\lim_{n\to\infty} 0,33_{n-\text{veces}}\dots 3 = \frac{1}{3}$, recordemos que

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \cdots + \frac{3}{10^k} + \frac{1}{3\times 10^k} \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sea ahora $\epsilon > 0$, y tomamos un n_0 de modo que $\frac{1}{10^{n_0}} < \epsilon$. Ahora para todo $n \geq n_0$ tenemos que

$$|\frac{1}{3} - 0,33_{n-\text{veces}}\dots 3| = \frac{1}{3\times 10^n} < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^{n_0}} < \epsilon$$

□

Observación. 1. *Un poco más adelante daremos procedimientos para calcular límites de sucesiones de forma más sencilla, aunque no debemos olvidar que debajo de todos ellos está la definición de límite.*

Proposición. 1. *El límite de una sucesión, si existe, es único.*

Demostración: Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión y supongamos que x e y son dos límites distintos de la sucesión, pongamos $x < y$ (razonamos por reducción al absurdo).

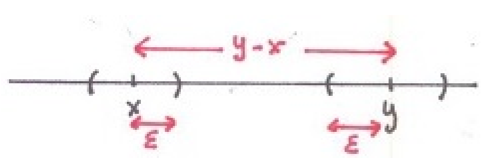

FIGURA 1. Puntos separados por intervalos abiertos.

La distancia que separa a x e y es $y-x$. Si tomamos $\epsilon = \frac{y-x}{4} > 0$, entonces tendría que existir n_0 de modo que para todo $n > n_0$ se tuviese que

$$|x_n - x| < \epsilon \qquad \text{y} \qquad |x_n - y| < \epsilon,$$

pero esto no es posible ya que entonces sería cierto que:

$$|y-x| = |y - x_n + x_n - x| < |y - x_n| + |x_n - x| < 2\epsilon = \frac{y-x}{2}$$

$\square$

Por otro lado no es cierto que toda sucesión tenga un límite.

Ejemplos. 3.
- *La sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada (como subconjunto de $\mathbb{R}$ no está acotada superiormente), no tiene límite.*
- *La Sucesión $((-1)^n + \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} = \{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5} \dots\}$ toma alternativamente valores cercanos a -1 y 1, luego los términos de la sucesión* ***no*** *se aproximan a un único número.*

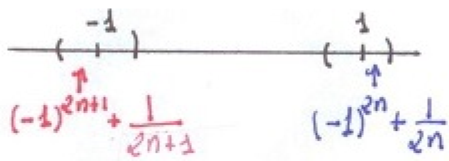

Figura 2. Sucesión no convergente.

Ejercicio. 1. *Prueba que toda sucesión convergente está acotada, es decir como conjunto de $\mathbb{R}$ es un conjunto acotado inferior y superiormente.*

En los ejemplos anteriores, podemos ver que existen sucesiones acotadas que no son convergentes.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es