AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Dada una señal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

1. f no tiene por que ser periódica.
2. f no tiene por que estar limitada en el tiempo.
3. f no tiene por que tener un espectro de frecuencias discreto.

Ejemplo 1. *Si f es una función dada por una serie de Fourier compleja*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} \qquad \text{donde} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

la función f es periódica y a cada frecuencia $\frac{n}{2\pi}$ le corresponde una 'energía' c_n. Es decir f está formada por una familia discreta de frecuencias. Tomando como modelo la serie anterior, podemos tratar de encontrar el 'espectro continuo' de una señal tomando

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \qquad \text{donde} \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

así obtendríamos la 'energía' correspondiente a la frecuencia $\frac{\lambda}{2\pi}$. Claro, ahora las frecuencias λ recorren todo $\mathbb{R}$ y la señal f no tiene por que ser periódica. Todo ello nos da pie a dar la siguiente definición.

Definición 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una señal cuya variable es t el **tiempo**. Se llama **transformada de Fourier** de la función f a la función real a valores complejos*

$$\begin{array}{rcccc} \widehat{f} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & \lambda & \to & \widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \end{array}$$

*cuya variable λ recorre el dominio de las **frecuencias**.*

Observación 1. *En otro contexto, el de* ***teoría de probabilidades****, dada una variable aleatoria X cuya función de distribución viene dada por una función de densidad f, la expresión $\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{isx}ds$ representa la* ***función generatriz de momentos****. No es más que que una transforamda de Fourier.*

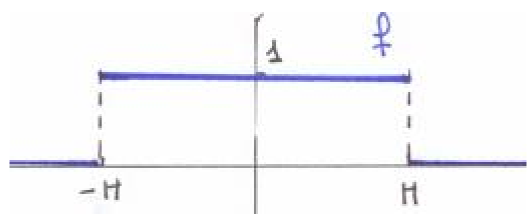
Notación:

1. En otros textos se puede ver la notación $F[f](\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$.
2. En otros textos la definición de la transformada de Fourier $\widehat{f}$ se da como
$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$
Es decir, nuestra definición salvo una constante. Más adelante cuando veamos el **Teorema de Inversión** entenderemos el sentido de mutiplicar por la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Ahora vamos a ver dos ejemplos del cálculo de transformadas de Foruier, donde además veremos que ocurre con las frecuencias. Para ellos vamos a representar las gráficas de las transformadas de Fourier.

Ejemplo 2. *Se considera la función*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$



Calculemos su transformada de Fourier. Como

$$f(t)e^{-i\lambda t} = f(t)[\cos(\lambda t) - i\,\mathrm{sen}(\lambda t)]$$

y por ser f una función par, se tiene que $f(t)\,\mathrm{sen}(\lambda t)$ es impar y por tanto $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(\lambda t)dt = 0$. Así

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t)dt$$
$$= \frac{\mathrm{sen}(\lambda t)}{\lambda}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{\mathrm{sen}(\lambda\pi)}{\lambda} \to_{\lambda\to 0} 2\pi.$$

Donde el límite que aparece al final se calcula por L'Hôpital. Además como $2\frac{\operatorname{sen}(\lambda\pi)}{\lambda}$ es una función par en λ y $\lim_{\lambda\to\pm\infty} 2\frac{\operatorname{sen}(\lambda\pi)}{\lambda} = 0$, la gráfica de esta transformada es

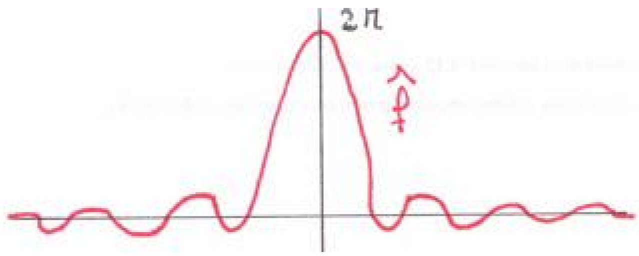
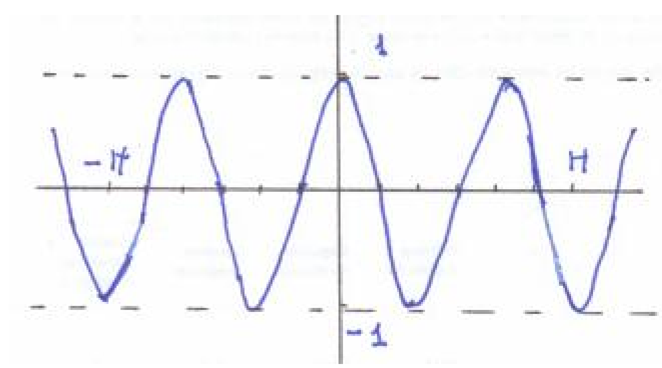


FIGURA 1. Transformada de Fourier de la función de f.

Observación: la función f anterior es casi constante, luego no lleva frecuencias asociadas salvo $\lambda = 0$, que es lo que desccubre precisamente su transformada de Fourier.

Ejemplo 3. *Se considera la función*



$$f(t) = \begin{cases} \cos 3t & si \quad t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

f es una función par, por tanto la función $f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)$ es una función impar y su correspondiente integral sobre un intervalo centrado en cero es nula.

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 3t \cos \lambda t dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t(3+\lambda))dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t(3-\lambda))dt$$

donde hemos usado que $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$, y así

$$= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((3+\lambda)t)}{3+\lambda}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((3-\lambda)t)}{3-\lambda}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}((3+\lambda)\pi)}{3+\lambda} + \frac{\operatorname{sen}((3-\lambda)\pi)}{3-\lambda}$$

$$= \frac{1}{9-\lambda^2}[(3-\lambda)\operatorname{sen}((3+\lambda)\pi) + (3+\lambda)\operatorname{sen}((3-\lambda)\pi)]$$

usando que $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$,

$$= \frac{1}{9-\lambda^2}[(3-\lambda)\cos 3\pi \operatorname{sen} \lambda\pi + (3+\lambda)\cos 3\pi \operatorname{sen}(-\lambda\pi)]$$

$$= \frac{1}{9-\lambda^2}[-(3-\lambda)\operatorname{sen}\lambda\pi + (3+\lambda)\operatorname{sen}\lambda\pi] = \frac{2\lambda \operatorname{sen}\lambda\pi}{9-\lambda^2}.$$

La función $\widehat{f}(\lambda) = \frac{2\lambda \operatorname{sen}\lambda\pi}{9-\lambda^2}$ es par, se anula en cero; $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \frac{2\lambda \operatorname{sen}\lambda\pi}{9-\lambda^2} = 0$ y además usando L'Hôpital se tiene que $\lim_{\lambda\to\pm 3} \frac{2\lambda \operatorname{sen}\lambda\pi}{9-\lambda^2} = \pi$. Ahora es fácil pintar su gráfica

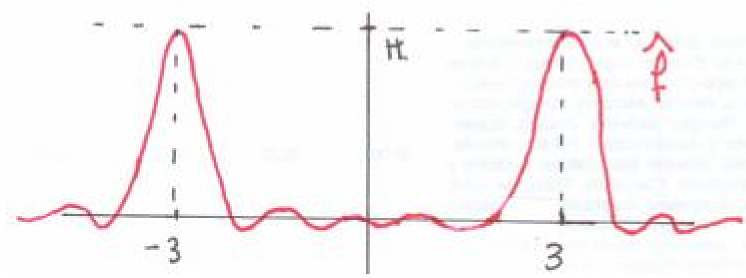


Figura 2. Transformada de Fourier de la función de f.

la cuál, como se ve, descubre la frecuencia $\frac{3}{2\pi}$ de la función f.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`