AM

HOJA 9:

PROBLEMA 12:) a) PARA $s \geq s_0$

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-s_0 t} e^{s_0 t} e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-s_0 t} e^{-(s-s_0)t} dt$$

COMO $f(t) e^{-s_0 t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ $\exists t_0$ TAL QUE $\forall t \geq t_0$

$$|f(t) e^{-s_0 t}| \leq 1$$

ASI $|f(t) e^{-s_0 t} e^{-(s-s_0)t}| \leq e^{-(s-s_0)t}$ $t \geq t_0$

LUEGO $\int_0^\infty |f(t) e^{-s_0 t} e^{-(s-s_0)t} dt| \leq$

$$\leq \int_0^{t_0} |f(t) e^{-st}| dt + \int_{t_0}^\infty e^{-(s-s_0)t} dt < \infty$$

LUEGO COMO LA FUNCIÓN ES ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE, TAMBIÉN ES INTEGRABLE

Y ASI $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt < \infty$ $\forall s \geq s_0$.

b) $f(x) = \cos \beta x$ $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty \cos\beta x \, e^{-sx} dx \underset{\text{PARTES}}{=}$

$$\frac{\cos\beta x \, e^{-sx}}{-s}\Big|_0^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty \beta \operatorname{sen}\beta x \, e^{-sx} dx = \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s}\int_0^\infty \operatorname{sen}\beta x \, e^{-sx} dx =$$

$$\underset{\text{PARTES}}{=} \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s}\left[\frac{\operatorname{sen}\beta x \, e^{-sx}}{-s}\Big|_0^\infty + \frac{\beta}{s}\int_0^\infty \cos\beta x \, e^{-sx} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\beta^2}{s^2}\mathcal{L}f(s) \quad \text{DESPEJANDO}$$

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{s^2}\right)\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{ASI} \quad \mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+\beta^2}.$$

AM

HOJA 2

PROBLEMA 14:

$$f(t) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x, & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx = \int_3^\infty x \operatorname{sen} x \, e^{-sx} dx =$$

$y = x-3$

$dy = dx$

$$= \int_0^\infty (y+3) \operatorname{sen}(y+3) e^{-s(y+3)} dy =$$

$$= \int_0^\infty (y+3) [\operatorname{sen} y \cos 3 + \cos y \operatorname{sen} 3] e^{-3s} e^{-sy} dy =$$

$$= e^{-3s} \Big[\cos 3 \int_0^\infty y \operatorname{sen} y \, e^{-sy} dy + 3 \cos 3 \int_0^\infty \operatorname{sen} y \, e^{-sy} dy +$$

$$+ \operatorname{sen} 3 \int_0^\infty y \cos y \, e^{-sy} dy + 3 \operatorname{sen} 3 \int_0^\infty \cos y \, e^{-sy} dy \Big] =$$

Prob. 12.

$$= e^{-3s} \cos 3 \; \mathcal{L}[y \operatorname{sen} y](s) + 3 \cos 3 \, e^{-3s} \frac{1}{s^2+1} +$$

$$+ e^{-3s} \operatorname{sen} 3 \; \mathcal{L}[y \cos y](s) + 3 \operatorname{sen} 3 \, e^{-3s} \frac{s}{s^2+1} =$$

TABLA ó CÁLCULO DE $\mathcal{L}[y \operatorname{sen} y]$ y $\mathcal{L}[y \cos y]$

$$= e^{-3s} \cos 3 \left[\frac{2s}{(s^2+1)^2} + 3 \frac{1}{s^2+1} \right] +$$

$$e^{-3s} \operatorname{sen} 3 \left[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + 3 \frac{s}{s^2+1} \right].$$

AM

HOJA 4:

PROBLEMA 15:

2) $\mathcal{L} f(s) = \dfrac{4}{s^2+3s+1}$ =

$s^2+3s+1=0 \iff s = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = -3/2 - \sqrt{5}/2$ ó $-3/2 + \sqrt{5}/2$

$$= 4 \frac{1}{(s+3/2+\sqrt{5}/2)(s-3/2+\sqrt{5}/2)} = 4 \frac{A}{s+3/2+\sqrt{5}/2} + \frac{B}{s-3/2+\sqrt{5}/2} =$$

$$= 4 \frac{-1/3}{s+3/2+\sqrt{5}/2} + 4 \frac{1/3}{s-3/2+\sqrt{5}/2}$$ usando las

tablas

$$f(x) = -4/3\, e^{-(3/2+\sqrt{5}/2)x} + 4/3\, e^{-(-3/2+\sqrt{5}/2)x}$$

5) $\mathcal{L} f(s) = \dfrac{s+1}{s^2+1} = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{1}{s^2+1}$ usando

las tablas se ve que

$f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$.

AM

HOJA 4ª

PROBLEMA 15º]

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s}{s^2-4s+3} = \frac{s}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3}$$

Y ASÍ $f(x) = A e^{x} + B e^{3x}$

PROBLEMA 16º] SI $E(t) = V(t) + RC\,V'(t) + RLC\,V''(t)$ ES LA ECUACIÓN DE UN CIRCUITO RLC.

APLICANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE (TENIENDO EN CUENTA QUE LA SALIDA DEL CIRCUITO VERIFICA $V(0) = V'(0) = 0$) SE TIENE

$$\mathcal{L}V(s) = \mathcal{L}E(s)\,\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

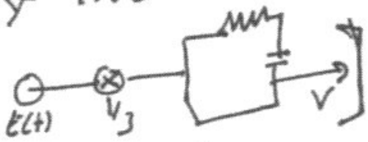
- ASÍ SI $H(s) = \frac{1}{s+3} = \frac{1/3}{\frac{s}{3}+1}$

ASÍ LA EDO ASOCIADA ES

$$E(t) = 3\left[V(t) + \tfrac{1}{3} V'(t)\right]$$

$$\iff \frac{E(t)}{3} = V(t) + \tfrac{1}{3} V'(t).$$

[NOTA LA SEÑAL $E(t)$ SE MULTIPLICA POR $1/3$ Y LUEGO SE PASA POR UN FILTRO $RC = 1/3$



]

- ASÍ SI $H(s) = \frac{s}{s^2-4s+3} = \frac{s}{(s-1)(s-3)} = \frac{3/2}{s-1} + \frac{-1/2}{s-3} = \frac{3}{2}H_1(s) - \frac{1}{6}H_2(s)$

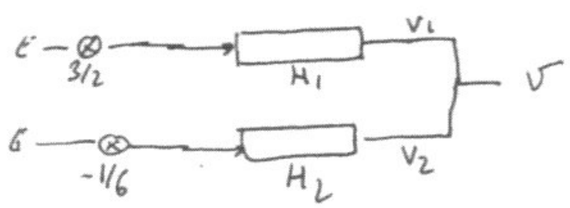
DESCOMPOSICIÓN FRACCIONES SIMPLES

NECESITAMOS DOS ECUACIONES

$$E(t) = 2/3\left[-V_1(t) + V_1'(t)\right]$$

$$E(t) = -6\left[-V_2(t) + \tfrac{1}{3} V_2'(t)\right]$$

Y LA SOLUCIÓN $V(t) = V_1 + V_2$



AM

HOJA 4:

PROBLEMA 17:

e) $\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial y}{\partial x} + y = e^{-x} + 3 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

APLICANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$s^2 \mathcal{L}y(s) + 2s\mathcal{L}y(s) + \mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}\{e^{-x}+3\}(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}\left(\frac{1}{s+1} + 3/s\right)$$

COMO $\frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$ SI $h(x) = e^{-x}x \Rightarrow$

$$\boxed{y(x) = \left((e^{-t}+3) * h(t)\right)(x) = \int_0^x (e^{-t}+3)\cdot e^{-(x-t)}(x-t)\,dt}$$

O TAMBIÉN USANDO EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES:

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{4s+3}{(s+1)^2(s+1)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}$$

$$\Rightarrow A(s+1)^3 + Bs(s+1)^2 + Cs(s+1) + Ds = 4s+3$$

$$\Rightarrow A(s^3+3s^2+3s+1) + B(s^3+2s^2+s) + C(s^2+s) + Ds$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 2B + C = 0 \\ 3A + B + C + D = 4 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=3 \\ B=-3 \\ C=-3 \\ D=1 \end{matrix}$$

ASÍ $\mathcal{L}y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{s+1} - \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}$ MIRANDO LAS TABLAS

$$y(x) = 3 - 3e^{-x} - 3xe^{-x} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2e^{-x}}_{(*)}$$

(*) $\mathcal{L}[t^2](s) = \int_0^\infty t^2 e^{-ts}\,dt = \frac{t^2e^{-ts}}{-s}\Big|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-ts}\,dt =$

$$= \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-ts}\,dt = \frac{2}{s^3}$$