AM

HOJA 6º

PROBLEMA 1º]

b) HAGAMOS LA TABLA

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	$-i$

1 es el elemento neutro

y $\begin{cases} (-1)^{-1} = -1 \\ i^{-1} = -i \\ (-i)^{-1} = i \end{cases}$

c) $G = \{x \in \mathbb{C} : x^n = 1\}$ con el producto y $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Como $(\mathbb{C}\ \times)$ es asociativo y conmutativo, $(G\ \times)$ también tiene estas propiedades, si $\forall x, y \in G \Rightarrow x \times y \in G$

Esto es así ya que $(x \times y)^n = x^n \times y^n = 1 \times 1 = 1$.

1 es el elemento neutro

y si $x \in G$ $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n} = 1$, así $\frac{1}{x} \in G$ y $x \times \frac{1}{x} = 1$.

e) $(GL(2, \mathbb{Z}_3)\ \times) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \text{tal que } a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3 \text{ y } ad - bc \not\equiv 0 \bmod 3 \right\}$

$\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$; $\mathbb{Z}_3$ es un cuerpo ya que 3 es primo.

Como vimos en algebra lineal

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ luego si $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$

se sigue que $|A \cdot B| \neq 0$, luego $A \cdot B \in GL(2, \mathbb{Z}_3)$

si $A, B \in GL(2, \mathbb{Z}_3)$. El producto de matrices es asociativo.

$\begin{pmatrix} [1] & 0 \\ 0 & [1] \end{pmatrix}$ es el elemento neutro

y si $\begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z}_3)$ con $|A| = [ad - bc] \not\equiv 0 \bmod 3$

entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{[d]}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix}$ es el inverso de $\begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix}$.

AM

HOJA 6:

PROBLEMA 1: g) $(\mathbb{Z}_m^* = \{[n] \in \mathbb{Z}_m : \exists [n]^{-1}\}, \times)$

COMO $[n] \in \mathbb{Z}_m^* \iff mcd(n,m) = 1$
(PROBLEMA HOJA 5)

SI $n,k \in \mathbb{Z}_m^* \Rightarrow mcd(n \cdot k, m) = 1$

(SEA $r \mid n \cdot k$ Y $r \mid m$ Y SEA p PRIMO CON $p \mid r$,

ASÍ $p \mid n \cdot k \Rightarrow p \mid n$ Ó $p \mid k$ Y $p \mid m$

LUEGO $mcd(n,m) = p$ Ó $mcd(k,m) = p$) (CONTRADICCIÓN)

LUEGO $[n][k] = [n \cdot k] \in \mathbb{Z}_m^*$. LA OPERACIÓN $\times$ ESTÁ BIEN DEFINIDA EN $\mathbb{Z}_m^*$.

COMO $(\mathbb{Z}_m \times)$ ES ASOCIATIVA, TAMBIÉN $(\mathbb{Z}_m^* \times)$ ES ASOCIATIVA (Y CONMUTATIVA)

$1 \in \mathbb{Z}_m^*$ Y ES EL ELEMENTO NEUTRO

COMO $[n][n]^{-1} = 1$ SE SIGUE QUE $[n]$ Y $[n]^{-1} \in \mathbb{Z}_m^*$

Y ASÍ $[n]$ TIENE INVERSO EN $\mathbb{Z}_m^*$.

POR TANTO $(\mathbb{Z}_m^* \times)$ ES UN GRUPO ABELIANO.

PROBLEMA 2: a) $(G = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}\ \times)$ NO ES GRUPO.

NO TIENE ELEMENTO INVERSO; ESTE SERÍA EL $1 \notin G$.

b) $(G = \{a \in \mathbb{Z} : a = n^2 \quad n \in \mathbb{N}\}\ +)$

$4, 9 \in G$ PERO $(4+9) = 13 \neq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

c) $(G = \{a \in \mathbb{Z} : a = n^2 \quad n \in \mathbb{N}\}\ \times)$ SEA $n^2 \in G$

NO EXISTE $m^2 \in G$ CON $n^2 \cdot m^2 = (n \cdot m)^2 = 1$

SALVO $n = m = 1$; LUEGO NO TODO ELEMENTO TIENE INVERSO

d) $G = \{[0], [2], [3], [6]\}$

$(G +) \subseteq (\mathbb{Z}_8 +)$ NO ES GRUPO YA QUE $[2]+[3] = [5] \notin G$

$(G \times) \subseteq (\mathbb{Z}_8 \times)$ NO ES GRUPO YA QUE $[2][3] = [6]$, $[2][2] = [2]$ Y $[2][6] = [12] = [4]$ } $[2]$ NO TIENE INVERSO

AM

HOJA 6:

PROBLEMA 3: $((-1,1)\ *)$ CON $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

A) LA OPERACIÓN ESTÁ BIEN DEFINIDA YA QUE

SI $xy = -1 \iff x = \dfrac{-1}{y}$

SI $y \in (-1,1)$ $\left|-\dfrac{1}{y}\right| > 1$, LUEGO $\dfrac{x+y}{1+xy} \in \mathbb{R}$ SI $x, y \in (-1,1)$

ADEMAS SEA $f(x) = \dfrac{x+a}{1+xa}$ $\quad a \in (-1,1)$

$$f'(x) = \frac{(1+xa) - a(x+a)}{(1+xa)^2} = \frac{1-a}{(1+xa)^2} > 0 \quad \text{SI } a \in (-1,1)$$

LUEGO f ES CRECIENTE EN TODO SU DOMINIO.

$f(-1) = \dfrac{-1+a}{1-a} = -1$

y $f(1) = \dfrac{1+a}{1+a} = 1$

LUEGO $f(x) \in (-1,1)$ $\forall x \in (-1,1)$

ASI SE PRUEBA QUE $\dfrac{x+y}{1+xy} \in (-1,1)$ $\forall x, y \in (-1,1)$

B) ES CONMUTATIVA: ES OBVIO QUE $x * y = y * x$.

C) ES ASOCIATIVA:

$$(x*y)*z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + \frac{y+z}{1+yz} x} = x * (y*z)$$

C) $0 \in (-1,1)$ y $0 * x = x$ $\quad \forall x \in (-1,1)$

ELEMENTO NEUTRO

D) SI $x \in (-1,1)$, $\quad -x \in (-1,1)$ y

$x * (-x) = \dfrac{x + (-x)}{1 + (x(-x))} = 0$; LUEGO CADA $x \in (-1,1)$

TIENE UN INVERSO

ASI $((-1,1)\ *)$ ES UN GRUPO.

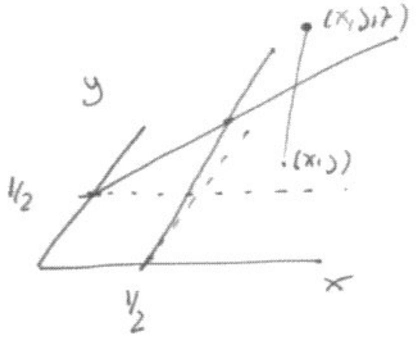
AM

HOJA 6:

PROBLEMA 4:

SI x y $1-x$ tienen que ser inversos

para $x = 1/2$ $\quad 1-1/2 = 1/2$, parece como que $1/2$ tendría que ser el elemento neutro.



$$0 = \begin{vmatrix} x-1/2 & 1/2 & 0 \\ y-1/2 & 0 & 1/2 \\ z-1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}(z-1/2) - \frac{1}{4}(x-1/2) - \frac{1}{4}(y-1/2)$$

Sobre las líneas $x = 1/2$ y $y = 1/2$ la operación tendría que ser la identidad

$$\Rightarrow \quad z = x+y-1/2$$

Luego $\forall x,y \in \mathbb{R}$ definimos la operación

$$x * y = x+y-1/2 \in \mathbb{R}$$

A) Esta operación está bien definida

B) Obviamente es conmutativa

C) Es asociativa ya que $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

$$(a*b)*c = (a+b-1/2)+c-1/2 = a+b+c-1 =$$
$$= a+(b+c-1/2)-1/2 = a*(b*c)$$

D) $x = 1/2$ es el elemento neutro

$$y + 1/2 = y+1/2-1/2 = y$$

E) Si $x \in \mathbb{R}$ $\quad x*(1-x) = x+(1-x)-1/2 = 1/2$

Luego $1-x$ es el inverso de x.

PROBLEMA 5: Si $H \subseteq (G*)$ con $a*b \in H$ $\forall a,b \in H$ y $b^{-1} \in H$ $\forall b \in H$; entonces $(H*)$ tiene una operación, que es asociativa por serlo en $(G*)$, además para $b, b^{-1} \in H$ $b*b^{-1} = e \in H$, luego $(H*)$ tiene elemento neutro y cada elemento b un inverso en H. Luego $(H*)$ es un grupo. (La otra parte es teoría)

AM

HOJA 6:

PROBLEMA 6:) SI $|H| = n$ FINITO.

SEA $a \in H$; $a^2 \in H$, $a^3 \in H$ Y EN GENERAL $a^k \in H$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

POR SER H FINITO EXISTEN J Y m NATURALES TALES QUE $a^J = a^{J+m}$ (PRINCIPIO DEL PALOMAR)

ASÍ $(a^J)^{-1} * a^J = (a^J)^{-1} * a^J * a^m$

$\Rightarrow e = a^m$

LUEGO EL ELEMENTO NEUTRO $e \in G$ ESTÁ EN H.

ADEMÁS SI $a \in H$ $a \cdot a^{m-1} = e$ LUEGO $a^{-1} = a^{m-1} \in H$.

LUEGO EL INVERSO DE CADA $a \in H$ ESTÁ EN H.

POR EL PROBLEMA ANTERIOR $(H *)$ ES UN SUBGRUPO

PROBLEMA 7:) $GL(2, \mathbb{Z}_2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \text{ y } ad - bc \neq_2 0 \right\}$

COMO a, b, c Y d SON 0 O BIEN 0 Ó BIEN 1

SI $a = 0 \Rightarrow b$ Y $c \neq 0$ LUEGO $c = b = 1$ Y $d = 0$ Ó 1

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

SI $a = 1$ $\begin{cases} \text{SI } b = 0 \Rightarrow d = 1 \text{ Y } c = 0 \text{ Ó } 1 \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{SI } b = 1 \begin{cases} \text{SI } c = 0 \Rightarrow d = 1 \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{SI } c = 1 \Rightarrow d = 0 \text{ Ó } 1 \end{cases} \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ASÍ $GL(2, \mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Y $|GL(2, \mathbb{Z}_2)| = 6$

AM

HOJA 6:

PROBLEMA 7: CONTINUACIÓN:

$*$		$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
		I	a	b	c	d	d^{-1}
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	I	I	a	b	c	d	d^{-1}
$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	a	a	I	d	d^{-1}	b	c.
$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	b	b	d^{-1}	I	d	c	a
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	c	c	d	d^{-1}	I	a	b
$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	d	d	c	a	b	d^{-1}	I
$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	d^{-1}	d^{-1}	b	c	a	I	d.

EL ELEMENTO I TIENE ORDEN 1

LOS ELEMENTOS a, b Y c " 2

LOS ELEMENTOS d Y d^{-1} " 3.

POR LO TANTO GL NO ES CÍCLICO, PUES AL SER FINITO, TENDRÍA QUE HABER UN ELEMENTO DE ORDEN 6 Y NO LO HAY.

MIRANDO LA TABLA NO HAY SIMETRÍA RESPECTO DE LA DIAGONAL, LUEGO <u>NO</u> ES ABELIANO

AM

HOJA 6:

PROBLEMA 4:

$\# (\mathbb{Z}_{12}^* \times) = (\{[1],[5],[7],[11]\} \times)$

ES UN GRUPO DE ORDEN 4

$[1]$ TIENE ORDEN 1

$[5]^2 = [25] \equiv [1]$ LUEGO $[5]$ TIENE ORDEN 2.

$[7]^2 = [49] = [1]$ " $[7]$ " " 2

$[11]^2 = [121] = [12\times10+1] = [1]$ LUEGO $[11]$ TIENE ORDEN 2.

$(\mathbb{Z}_{12}^* \times)$ NO ES CÍCLICO, NO TIENE NINGÚN ELEMENTO DE ORDEN 4, SI TIENE 3 ELEMENTOS DE ORDEN 2 Y POR TANTO SOLO TIENE TRES SUBGRUPOS DISTINTOS DE ORDEN 2

$\# (\mathbb{Z}_7^* \times)$ COMO 7 ES PRIMO $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\} \times)$ ES UN GRUPO MULTIPLICATIVO, LUEGO

$(\mathbb{Z}_7^* \times) = (\{[1],[2],[3],[4],[5],[6]\} \times)$.

$[1]$ TIENE ORDEN 1

$[2]$, COMO $[2^3] = [8] =_7 [1]$, TIENE ORDEN 3

$[3]$, COMO $[3^6] = [729] =_7 [1]$ TIENE ORDEN 6 Y ES UN GENERADOR DE $\mathbb{Z}_7^*$

$[3^2] = [2]$ Y $[3^3] = [27] = [6]$

$[4]$ ORDEN 3 YA QUE $[4^3] = [64] \equiv [1]$.

$[5]$ ES DE ORDEN 6 Y POR TANTO UN GENERADOR

YA QUE $[5^6] = [5^{\varphi(7)}] = [1]$

CON $[5^2] = [25] = [4]$ Y $[5^3] = [125] = [6]$.

$[6]$ ES DE ORDEN 2 YA QUE $[6^2] = [36] \equiv [1]$.

POR TANTO $(\mathbb{Z}_7^* \times)$ ES CÍCLICO

AM

HOJA 6:

PROBLEMA 11] a) SI $a \in G$ GRUPO

$|a| = n \in \mathbb{N}$ Y $n = pq$

$e = a^n = a^{pq} = (a^p)^q$ LUEGO ORDEN $a^p \leq q$

SI $r < q$ $\Rightarrow$ $a^{pr} = e$ $\Rightarrow$ ord $a < n$

LO CUAL NO ES POSIBLE ; ASI ord $a^p = q$

b) SI $|a| = n$, ed $a^n = e$ $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$

LUEGO $\operatorname{ord}(a^{-1}) \leq n$

SI $\operatorname{ord}(a^{-1}) < n$ $\Rightarrow$ ord $a < n$ LO CUAL NO ES POSIBLE

POR OTRO LADO SI $(a \cdot b)^n = 1$

$\Rightarrow a\underbrace{(ba)(ba) \cdots (ba)}_{n-1 \text{ VECES}} \cdot b = 1$

ASI $a^{-1} = (b \cdot a)^{n-1} b$

LUEGO $(a^{-1} b^{-1}) = (b\,a)^{-1} = (b \cdot a)^{n-1}$

Y POR TANTO $(b \cdot a)^m = 1$

ASI $\operatorname{ord}(b \cdot a) \leq n$ (SI FUESE MENOR $\Rightarrow \operatorname{ord}(a \cdot b) < n$ LO CUAL NO ES POSIBLE)

c) SI $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = H$ SUBGRUPO CON $|H| \geq 1$

SE SIGUE QUE $|H| \mid |\langle a \rangle| = \operatorname{ord} a$. (USANDO EL TEOREMA DE LAGRANGE).

$|H| \mid |\langle b \rangle| = \operatorname{ord} b$

COMO $\operatorname{mcd}(\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b) = 1$ $\Rightarrow |H| = 1$

AM

HOJA 6:

EJERCICIO 17:

a) $n \mid p^m - 1 \iff p^m \equiv 1 \mod n$.

SEA $(\mathbb{Z}_n \ \times)$ COMO $mcd(p, n) = 1$ EXISTE p^{-1} Y POR TANTO $p \in (\mathbb{Z}_n^* \ \times)$ GRUPO MULTIPLICATIVO FINITO

ASÍ EXISTE m CON $p^m = 1$

USANDO EL PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT

$$p^{\Phi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

DONDE Φ ES LA FUNCIÓN DE EULER DE n

Y DONDE $\Phi(n) = \text{Card } \mathbb{Z}_n^*$

b) SI n ES PRIMO $\Phi(n) = n-1$

Y ASÍ $p^{n-1} \equiv 1 \mod n$.

PROBLEMA 18: H ES NORMAL SI $gH = Hg \ \forall g \in G$

$\iff gHg^{-1} = H \ \forall g \in G$.

a) SI $[G:H]=2$ $\quad G = [e] \cup [f] = H \cup [f]$ con $H \cap [f] = \emptyset$

SI $g \in H$ ES CLARO QUE $g \circ H = H \circ g$

SI $g \in [f]$, $g^{-1} \in [f]$ YA QUE EN OTRO $g \in H$. Y NO ES POSIBLE.

SI AHORA $m \in H$, $g \circ m \notin H$, YA QUE EN OTRO CASO $g \in H$ Y NO ES POSIBLE.

ASÍ $g \circ m \in [f] = [g^{-1}] \Rightarrow (g \circ m) \circ g^{-1} \in H$.

LUEGO $g \circ m = Hg \ \forall m \in H$ ASÍ $g \circ H = H \circ g$.

b) SI p ES PRIMO $(\mathbb{Z}_p + \times)$ ES UN CUERPO.

ASÍ $GL(2, \mathbb{Z}_p) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p) : |A| \neq_p 0\}$ ES UN GRUPO VER EJERCICIO 1

SI $B \in GL(2, \mathbb{Z}_p)$ CON $|B| = 1$, ENTONCES.

$|A \cdot B \cdot A^{-1}| = |A|\,|B|\,|A^{-1}| = |A| \cdot 1 \frac{1}{|A|} = 1$

ÁLGEBRA LINEAL

LUEGO $A \cdot SL(2, \mathbb{Z}_p) = SL(2, \mathbb{Z}_p)\, A \quad \forall A \in GL(2, \mathbb{Z}_p)$ LUEGO ES NORMAL

AM

HOJA 6:

PROBLEMA 18:) b) CONTINUACIÓN.

COMO $SL(2,\mathbb{Z}_p)$ ES NORMAL LA RELACIÓN $\sim SL(2,\mathbb{Z}_p)$ ES UNA CONGRUENCIA

Y $GL(2,\mathbb{Z}_p)/SL(2,\mathbb{Z}_p)$ ES UN GRUPO

CON $GL(2,\mathbb{Z}_p)/SL(2,\mathbb{Z}_p) = \{[A] : A \in GL(2\mathbb{Z}_p)\}. =$

DONDE $B \in [A] \Leftrightarrow A \sim B \Leftrightarrow A \cdot B^{-1} \in SL(2\mathbb{Z}_p)$

$\Leftrightarrow |A \cdot B^{-1}| = A \cdot \frac{1}{|B|} = 1 \Leftrightarrow |A| = |B|.$

EN $\mathbb{Z}_p$ $|A| = [1], [2] \dots ó [p-1]$

$= \{[1] \quad [p-1]\} \longrightarrow (\mathbb{Z}_p^* \times)$

$[j] \xrightarrow{\varphi} [j]$

COMO $|A \cdot B| = |A||B|$
ALGEBRA LINEAL

φ ES UN HOMOMORFISMO DE GRUPOS.

COMO ADEMAS φ ES BIYECTIVA, OBVIAMENTE; SE SIGUE QUE

$GL(2,\mathbb{Z}_p)/SL(2,\mathbb{Z}_p)$ ES ISOMORFO

A $(\mathbb{Z}_p^* \times)$. c.q.d

AM

HOJA 6:

PROBLEMA 19|

$$G_1 = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{60} \quad Y \quad G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20}$$

AMBOS GRUPOS SON DE ORDEN $60 \times 24 = 1440$.

a) $mcd(24, 60) = 12$ $\quad$ $mcm(24, 60) = 120$

$mcd(2, 6, 6, 20) = 2$ $\quad$ $mcm(2, 6, 6, 20) = 60$

LUEGO TODO ELEMENTO DE G_1 TIENE ORDEN A LO MAS 120

$(1,1)$ TIENE ORDEN 120

POR OTRO LADO TODO ELEMENTO DE G_2 TIENE ORDEN A LO MAS 60

$(1,1,1,1)$ TIENE ORDEN 60

LUEGO G_1 Y G_2 NO PUEDEN SER ISOMORFOS.

b) $\mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$ CÍCLICO $(mcd(3,8) = 1)$

$\mathbb{Z}_{60} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12}$ CÍCLICO $(mcd(5,12) = 1)$

ASÍ

$$\begin{tikzcd}
G_1 = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{60} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12} \arrow[d, "\pi_2"] \\
& \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5
\end{tikzcd}$$

$(a, b) \longrightarrow ([a]_3, [a]_8, [b]_5, [b]_{12})$

$([a]_3, [a]_8, [b]_5)$

π_1 ISOMORFISMO

π_2 EPIMORFISMO

— · —

$\pi : G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{120}$ CÍCLICO

EXISTE $a \in \mathbb{Z}_{120}$ CON $ord(a) = 120$, SI π SOBREYECTIVA

$\exists x \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20}$ CON $f(x) = a$.

PARA a) $f(x \times 60) = f(0) = 0$

$f(x) \times 60 = a\,60 \neq 0$ YA QUE $ord\, a = 120$

NO ES POSIBLE

c) $1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$, USANDO LO VISTO EN a) VEMOS

QUE $J_1 = \mathbb{Z}_{2^5} \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_5$ CÍCLICO

$J_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$

$J_3 = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{2^3}$

Y $J_4 = \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_4$

NO SON ISOMORFOS ENTRE SÍ, NI LO SON A G_1 O G_2.