ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE DERIVADAS.

La Función Derivada.

Definición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Se llama función* ***derivada*** *a la función*

$$\begin{array}{rcccc} f' & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f'(x). \end{array}$$

Observación. 1.
- *$Dom f' = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; f$ es derivable en $x \,\}$.*
- *La función derivada es un nuevo objeto matemático, una función, con importantes propiedades y aplicaciones (además del cálculo de rectas tangentes de la que surge).*
- *Se puede conocer muchas propiedades de f a través de su derivada f' como veremos. El cálculo* ***integral*** *está íntimamente ligado al cálculo de derivadas (Teorema Fundamental del Cálculo).*

Una primera cuestión que hay que tener en cuenta es la siguiente.

Teorema. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la cuál es derivable en un punto $x = a$ de su dominio, es decir existe $f'(a)$, entonces necesariamente f es continua en el punto a.*

Demostración: Como existe

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y como la función valor absoluto es continua en todo $\mathbb{R}$ se deduce que

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = |f'(a)|.$$

- Si $f'(a) = 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que lo podemos tomar menor que 1, de modo que si

  $$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(a)| < |x - a|\epsilon < \epsilon,$$

  luego acabamos de ver que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Si $f'(a) \neq 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que lo podemos tomar menor que $\frac{\epsilon}{|f'(a)|+\epsilon} < 1$, de modo que si

  $$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(a)| < (|f'(a)| + \epsilon)|x-a| < \epsilon,$$

  luego acabamos de ver que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

□

La condición del Teorema no es en cambio suficiente. Ya hemos visto que la función $f(x) = |x|$ es continua en toda la recta, pero **no** es derivable en $x = 0$.

Cálculo de Derivadas.

Como vimos en el caso de límites, las derivadas se comportan bien respecto de las operaciones algebraicas habituales. Lo que nos permite conocer y calcular derivadas de muchas funciones conociendo las de unas pocas y usando las reglas siguientes.

Teorema. 2. *Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un punto $x = a$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

a: *existe* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
b: *existe* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$, *y así existe* $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$;
c: *existe* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
d: *si* $g(a) \neq 0$ *existe* $(\frac{1}{g})'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$, *y por tanto*

$$\text{existe} \quad (\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Lo que acabamos de escribir son nuestras primeras **reglas de derivación. Demostración: a), b)** y **c)** quedan como ejercicios. Como se verá a continuación es un sencillo juego de límites.

d) Tenemos que calcular el siguiente límite, por definición de derivada,

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a) - g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}$$

$$= \lim_{x\to a} -\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \frac{1}{g(x)g(a)}$$

como g es derivable en a, y por tanto continua en a y $g(a) \neq 0$, se sigue

$$= \frac{-g'(a)}{g(a)^2.}$$

Ahora para calcular $(\frac{f}{g})'(a)$, solo es necesario aplicar la regla **c)** y lo que acabamos de ver. Así

$$(\frac{f}{g})'(a) = (f\frac{1}{g})'(a) = f'(a)\frac{1}{g}(a) + f'(a)(\frac{1}{g})'(a) =$$

$$= \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a)\frac{g(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

□

La siguiente **regla de derivación** es también muy útil.

Corolario. 1. *Si* $f(x) = x^n$, *con* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración: Esta prueba se hace por inducción. El caso $n = 0$ y $n = 1$ ya los conocemos, los pusimos como ejemplos de cálculo de derivadas después de dar la definición.

- Si $n = 0$, entonces $f(x) = x^0 = 1$ y sabemos que $f'(x) = 0$.
- Si $n = 1$, entonces $f(x) = x^1 = x$ y sabemos que $f'(x) = 1 = 1x^{1-1}$. Luego se cumple la fórmula.
- Si suponemos que para $f(x) = x^n$ se verifica que $f'(x) = nx^{n-1}$, entonces

  $$(x^{n+1})' = (xx^n)' = 1(x^n) + x(nx^{n-1}) = (n+1)x^n$$

  donde hemos usado **c)** del Teorema anterior

□

Corolario. 2. *Si* $f(x) = x^{-n}$, *con* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $f'(x) = -nx^{-n-1}$ *para* $x \neq 0$.

Demostración: $f(x) = \frac{1}{x^n}$, luego usando **d)** del Teorema anterior

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

□

Ejemplos. 1. *Las reglas anteriores nos permiten hacer los siguientes cálculos.*

- *Si* $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, *entonces*

  $$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2x + a_1;$$

- *en concreto si* $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1$, *entonces* $f'(x) = 9x^2 - 2x$;

- *si* $g(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$, *entonces si* $x \neq -1$

$$g'(x) = \frac{2x(x^3+1) - (x^2-1)3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4+3x^2+2x}{(x^3+1)^2}.$$

Regla de la Cadena.

La Regla de la Cadena es dentro de las Reglas de Derivación la más difícil de dominar, pero que juega un papel muy importante dentro del Cálculo. Hace referencia al modo en que se deriva la composición de dos funciones.

Teorema. 3. ***(Regla de la Cadena)****. Sean* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones de modo que* f *es derivable en* a *y* g *es derivable en* $f(a)$*, entonces existe*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Demostración: Tenemos que calcular el límite

$$(*) \qquad \lim_{x\to a} \frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Ahora por un lado, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to_{x\to a} f'(a)$, por otro lado $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(f(a)+h) - g(f(a))}{h} = g'(f(a))$. Si llamamos $h' = f(x) - f(a)$, como f es continua en a, entonces si $x \to a$ se sigue que $h' = f(x) - f(a) \to 0$ y así

$$g'(f(a)) = \lim_{h'\to 0} \frac{g(f(a)+h') - g(f(a))}{h'} = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)}.$$

Por lo tanto el límite $(*)$ que queremos calcular toma el valor $g'(f(a))f'(a)$

□

Ejemplo. 1. *Queremos derivar la función* $f(x) = (x^2-3)^2$.

Demostración: La función f es la composición de la función $h(x) = x^2 - 3$ con la función $g(x) = x^2$, así $f(x) = g \circ h(x)$ y por tanto usando la Regla de la Cadena

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 2(x^2-3)2x.$$

□

Teorema. 4. ***(de la Función Inversa.)*** *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, una función para la cuál que existe* $r > 0$ *de modo que* $(a-r, a+r) \subset Domf$*, existe* f' *y es continua en el intervalo* $(a-r, a+r)$ *y además* $f'(a) \neq 0$*, entonces existe* f^{-1} *cerca del punto* $f(a)$ *y además* f^{-1} *es derivable en el punto* $f(a)$ *de modo que*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demostración: Como todos los Teoremas de la Función Inversa la prueba no es fácil ni corta. Además vamos a necesitar un resultado que veremos un poco más adelante.

En primer lugar nos interesa la regla de derivación. Supongamos que f es derivable en a y que f^{-1} lo es en $f(a)$. Como $x = f^{-1}(f(x))$, derivando en los dos lados de la igualdad y usando la regla de cadena en el lado derecho, tenemos que

$$1 = (f^{-1})'(f(a))f'(a) \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)},$$

ya que $f'(a) \neq 0$.

Hagamos ahora la prueba completa. Como $f'(a) \neq 0$, pongamos $f'(a) > 0$ (el caso $f(a) < 0$ se trata de forma análoga), entonces por ser f' continua se sigue que $f' > 0$ en todo un intervalo centrado en a. Lo que dice que f es inyectiva (ver un poco más adelante la relación del signo de la derivada con el crecimiento de la función). Por tanto, usando el Toerema de la Función Inversa para funciones continuas, existe f^{-1} y es continua en un intervalo centrado en $f(a)$. Para ver si es derivable en $f(a)$, escribimos $f(a) = b$ y calculamos el límite

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$$

por se f^{-1} inyectiva existe un único $x = f^{-1}(y)$ y por serf^{-1} continua $x \to_{y\to b} a$

$$= \lim_{y\to b} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

Observación. 2. *La fórmula de derivación anterior puede escribirse como*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Ejemplos. 2.

- *Sea* $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, *para un* n *natural positivo. Como estamos ante la función inversa de* $g(x) = x^n$ *su derivada viene dada por la fórmula de derivación:*

$$f'(x) = \frac{1}{g'(x^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

  (La misma fórmula que para las potencias enteras).
- *Sea* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, *así* $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Otras reglas de derivación.

Tenemos que tener en cuentas otras reglas de derivación de funciones muy comunes. Algunas las podremos justificar ahora, otras más adelante.

$$\begin{array}{lll} \text{Si} \quad f(x)=\operatorname{sen} x, & \text{entonces} & f'(x)=\cos x. \\ \text{Si} \quad f(x)=\cos x, & \text{entonces} & f'(x)=-\operatorname{sen} x. \\ \text{Si} \quad f(x)=\tan x, & \text{entonces} & f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x. \\ \text{Si} \quad f(x)=e^x, & \text{entonces} & f'(x)=e^x. \\ \text{Si} \quad f(x)=\ln x, & \text{entonces} & f'(x)=\frac{1}{x}. \end{array}$$

Observemos que si conocemos la derivada de la función **seno,** entonces podemos deducir la del **coseno** y la de la **tangente**:

- Como $\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1$ (ver apéndice de Trigonometría), derivando en ambos lados de la igualdad tenemos
$$2\cos x(\cos x)'+2\operatorname{sen} x\cos x=0 \quad \Rightarrow \quad (\cos x)'+\operatorname{sen} x=0,$$
y despejando $(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$.
- Por definición $\tan x=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, como es un cociente de funciones su derivada será
$$(\tan x)'=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Si damos por válida la fórmula de la derivada de la función **exponencial** $(e^x)'=e^x$, entonces como el **logaritmo** es su función inversa tenemos que:
$$(\ln x)'=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

Ejercicio. 1. *Vamos a calcular las derivadas de las funciones:* $f(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$ *y* $g(x)=\arctan(\cos x+\operatorname{sen} x)$.

Demostración: Para ello utilizaremos las distintas reglas de derivación que ya conocemos. De la función **arcotangente** no conocemos una regla explícita de derivación, pero al ser una función inversa podemos deducirla fácilmente.

- $$\begin{aligned}(\frac{x\ln x}{x-1})'&=\frac{(x\ln x)'(x-1)-(x\ln x)(x-1)'}{(x-1)^2}\\ &=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$
- $$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan)'(\arctan x)}=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

- $$(\arctan(\cos x + \operatorname{sen} x))' = \arctan'(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)'$$
$$= \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{1 + (\cos x + \operatorname{sen} x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \cos^2 x + 2\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}$$
$$= \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{2 + sen2x}$$

□

De lo anterior, podemos añadir a nuestra lista de fórmulas de derivación las de las siguientes funciones inversas.

Si $f(x) = \arctan x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Si $f(x) = \arccos x$, entonces $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Observación. 3. *Tener en mente las* ***fórmulas de derivación****, incluida la* ***Regla de la Cadena****, nos será muy útil cuando resolvamos integrales en el Tema siguiente.*

Además de derivar funciones concretas, también podemos derivar funciones que vienen dadas por otra que sepamos que son derivables.

Ejercicio. 2. *Tenemos que calcular f' sabiendo que existe g' en los casos siguiente:*
a) $f(x) = g(x + g(a))$ *b)* $f(x) = g(xg(x))$ *c)* $f(x + 3) = g(x^2)$.

Demostración: En todos los casos deberemos usar la Regla de la Cadena y el hecho de que existe g'.

- **a:** $f'(x) = g'(x + g(a))(x + g(a))' = g'(x + g(a))$ (ya que $g(a)$ es una constante).
- **b:** $f'(x) = g'(xg(x))(xg(x))' = g'(xg(x))(g(x) + xg'(x))$.
- **c:** Si $y = x + 3$, entonces $f(y) = g((y - 3)^2)$ y ahora derivando
$$f'(y) = g'((y - 3)^2)((y - 3)^2))' = g'((y - 3)^2)2(y - 3)$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`