ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

REPRESENTACIÓN DE GRÁFICAS.

Al estudiar la continuidad de funciones, vimos que con la información que nos aportan los límites uno puede dar una idea aproximada de la gráfica de una función. Ahora al disponer de la derivada estamos en condiciones de precisar mucho más. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo. 1. *Vamos a representar la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x}{x^2 - x}$.

Demostración: Observemos que

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x}{x^2 - x} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}.$$

Luego, como existe el límite cuando $x \to 0$, podemos decir que

$$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \backslash \{1\},$$

y en este dominio f es continua.

Límites. Los límites en los extremos del dominio son:

- $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = -\infty$
- $\displaystyle \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \infty$
- $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = -\infty$
- $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \infty$

Luego la gráfica de la función tiene un aspecto como:

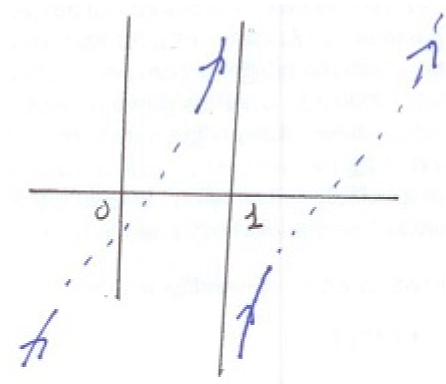

Figura 1. Primer apunte de la gráfica.

Cálculo de la derivada. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1+2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} > 0.$$

Como la derivada es positiva, la función es siempre creciente.

Además

$$f''(x) = \frac{-4}{(x-1)^3} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x < 1 \\ < 0, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Así, f es convexa si $x < 1$ y concava en otro caso.

Asíntotas Oblicuas. En este caso como existen

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = -1$$

se sigue que la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua de la función.

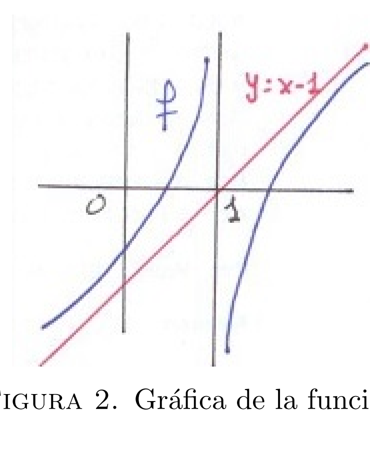

Figura 2. Gráfica de la función.

Observemos que la forma de la gráfica, su concavidad y convexidad, nos obliga a como colocar la gráfica con respecto a la asíntota $\square$

Ejemplo. 2. *Vamos a representar la gráfica de la función* $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x$.

Demostración:

Dominio y Límites. El logaritmo fuerza a que

$$\mathrm{Dom} f = (0, \infty).$$

f es continua en su Dominio y los límites en los extremos del Dominio son (usando la Regla de L'Hôpital cuando sea necesario):

- $\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{4}x^2 \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-8}{x^3}} = 0$. Como existe este límite, $0 \in \mathrm{Dom} f$ y allí f también es continua.
- $\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{4}x^2 \ln x = -\infty$.

Además es fácil ver que $f(x) > 0$ si $x \in (0, 1)$ y $f(x) < 0$ si $x > 1$. Luego

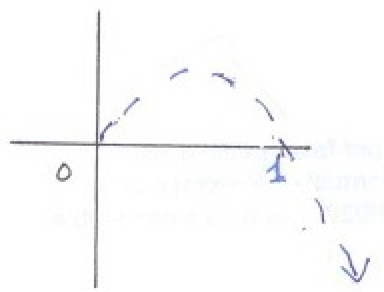

FIGURA 3. Boceto de la gráfica.

Estudio de la derivada. Derivando

$$f'(x) = -\frac{1}{4}2x \ln x - \frac{1}{4}x^2 \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}x[\ln x + \frac{1}{2}] \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x < e^{-\frac{1}{2}} \\ 0, & \text{si} \quad x = e^{-\frac{1}{2}} \\ < 0, & \text{si} \quad x > e^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Así es claro que la función crece en el intervalo $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ y después decrece. Por tanto $x = e^{-\frac{1}{2}}$ es un máximo relativo, pero también absoluto de la función.

Derivando otra vez

$$f''(x) = -\frac{1}{2}[\ln x + \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}x\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}[\ln x + \frac{3}{2}] \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x < e^{-\frac{3}{2}} \\ 0, & \text{si} \quad x = e^{-\frac{3}{2}} \\ < 0, & \text{si} \quad x > e^{-\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Así es claro que la función es convexa en el intervalo $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ y después concava. Por tanto $x = e^{-\frac{3}{2}}$ es un punto de inflexión de la función.

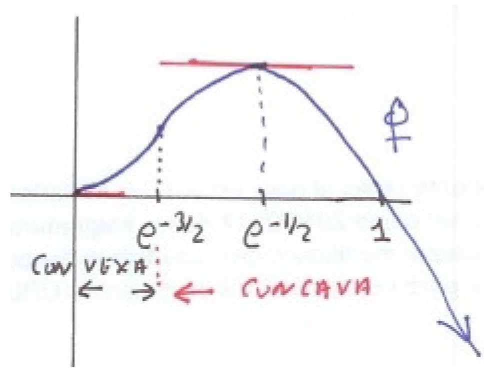

FIGURA 4. Gráfica de la función.

Observemos que la forma de la función, ser convexa cerca de cero, fuerza a que la derivada en cero sea nula. O de forma formal, por la Regla de L'Hôpital $f'(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x[\ln x + \frac{1}{2}] = 0$.

$\square$

Ejemplo. 3. *Vamos a dibujar la* ***elipse*** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Demostración: La elipse ya la hemos tratado antes (ver apéndice Gráficas de Funciones de varias Variables). Despejando en la fómula

$$y = \pm\sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}, \quad \text{para} \quad x \in [-a, a].$$

La función $f(x) = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$ para $x \in [0, a]$ ya la hemos dibujado en el artículo anterior. Nos salía una gráfica decreciente y concava. Como f es una funición **par** (es decir $f(x) = f(-x)$), la gráfica de $f(x) = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$ para $x \in [-a, 0]$ es simétrica respecto del eje $x = 0$ de la gráfica anterior. Por otro lado la gráfica de $f(x) = -\sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$ para $x \in [-a, a]$ es simétrica a la que tenemos respecto del eje $y = 0$.

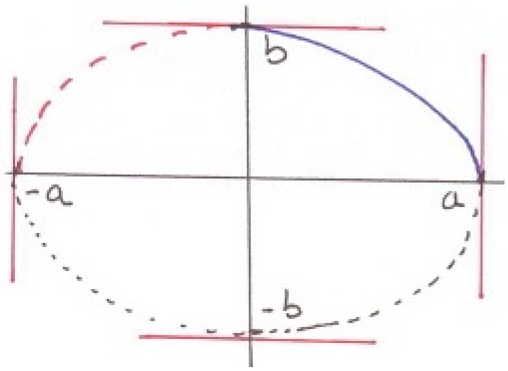

Figura 5. Elipse.

Como ejercicio se deja comprobar que los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ tienen tangentes horizontales y en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ las tangentes son verticales (ver apéndice siguiente sobre el concepto de tangente vertical). □

Ejercicio. 1. *Representar las gráficas de las funciones* $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ *y de* $g(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Demostración: En el Tema de Continuidad, en el artículo sobre Gráficas, dibujamos esta gráfica

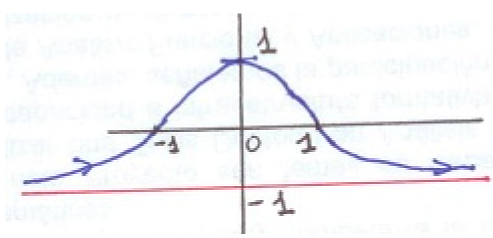

Figura 6. Gráfica de la función f.

Observemos que entonces no disponiamos de la derivada

$$f'(t) = \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \\ < 0, & \text{si} \quad 0. \end{cases}$$

Así, la función crece en $(0, \infty)$ y decrece en el resto del dominio; por tanto $t = 0$ es un máximo. Además esta función es **par** por definición, por eso nos sale simétrica recpecto al eje de las "y" $(x = 0)$.

Por otro lado, la función g la pintabamos como

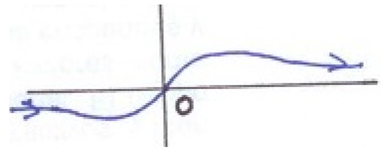

FIGURA 7. Gráfica de la función g.

Ésta es una función **impar** (es decir $g(x) = -g(-x)$), así podemos dibujar su gráfica simétrica respecto del origen $(0,0)$. Solo nos falta derivar y así

$$g'(t) = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x \in (-1,1) \\ 0, & \text{si} \quad x = -1 \text{ o } 1 \\ < 0, & \text{si} \quad x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Luego como preveíamos, tenemos un mínimo en $t = -1$ y un máximo en $t = 1$

$\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es