ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

Dados dos conjuntos A y B, podemos emparejar los elementos de A con los del conjunto B. Si lo hacemos de modo que para todo elemento $a \in A$ le asociamos, a lo más, con un único elemento $b \in B$, escribimos $f(a) = b \in B$, decimos que esta "operación" es una **aplicación** de A en B.

Ejemplos. 1.

- *Sea A el conjunto de alumnos de una clase.*

$$A = \{\textit{Juan, Elisa, Alba, Jesús}\dots\}$$

y B el conjunto de notas posibles de 0 *a* 10, *normalmente un entero con un decimal. Después del primer examen parcial, cada alumno que se haya presentado al examen tendrá su correspondiente nota: $N(Juan) = 3,2$; $N(Alba) = 6,7$; $N(Jesús) = 1,3$; ....etc. Elisa no se ha presentado y por tanto no tienen nota. Lo anterior es un ejemplo de aplicación.*

- *Se considera la sucesión $(e^n)_{n=1}^{\infty}$, que como sabemos es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} & & \\ & & n & \to & f(n) & = & e^n. \end{array}$$

- *Consideramos la siguiente asignación*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & f(x) & = & e^x - 1. \end{array}$$

*Esto es lo que llamariamos una **función real de variable real**, el objeto principal de nuestro estudio.*

En el apéndice sobre Teoría de Conjuntos se vio algunos preliminares sobre el concepto de aplicación. De forma formal tenemos.

Definición. 1. *Una **Aplicación** f entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano de A por B, $f \subset A \times B$, de modo que si $a \in A$ y $(a, b_1), (a, b_2) \in f$, entonces $b_1 = b_2$.*

a: *Se llama **Dominio** de una aplicación f al siguiente subconjunto de elementos de A,*

$$Domf = \{a \in A \ : \ \exists b \in B \ \ con \ \ (a,b) \in f\,\}.$$

b: *Se llama **Imagen** o **Rango** de f al siguiente subconjunto del conjunto B,*

$$Imf = \{b \in B \ : \ \exists a \in A \ \ con \ \ f(a) = b\,\}.$$

Observación. 1. *Dada una aplicación escribimos $f(a) = b$, en lugar de $(a,b) \in f$.*

A nosotros nos va a interesar el estudio de aplicaciones entre números reales. Las aplicaciones usualmente las llamaremos **funciones**.

Definición. 2.

- *Una aplicación de la recta real en si misma,*

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \to & f(x) & = & y, \end{array}$$

la llamaremos función real de variable real. LLamaramos a "x" la variable y su valor asociado "y" la imagen de "x".

- *Llamamos **Dominio** de la función f al siguiente subconjunto de elementos de $\mathbb{R}$,*

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \exists y \in \mathbb{R} \ \ con \ \ f(x) = y\,\}.$$

- *Llamamos **Imagen** o **Rango** de f al siguiente subconjunto del conjunto $\mathbb{R}$,*

$$Imf = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \mathbb{R} \ \ con \ \ f(x) = y\,\}.$$

Las funciones más interesantes de la Matemática Aplicada no son las funciones de una única variable, sino las de varias variables.

Definición. 3.

- *Una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en la recta real,*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} & & \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) & = & y, \end{array}$$

la llamaremos función real de varias variables reales, $x_1, ..., x_n$. También se le llama Campo Escalar y algunas veces potencial.

- *Una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m & & \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) & = & \overrightarrow{y} = (y_1, ..., y_m), \end{array}$$

la llamaremos función vectorial de varias variables reales, $x_1, ..., x_n$. También se le llama Campo Vectorial.

En Física los campos vienen dados por potenciales. Y las fuerzas que en ellos aparecen se representan por campos vectoriales. Nosotros vamos a centrarnos en estudiar funciones de una sola veriable real. En los apéndices podremos ver información adicional sobre funciones de varias variables.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que un problema con una función de n-variables, cálculo de derivadas o integrales...etc, se suele reducir a resolver n problemas de una única variable. Por ello antes de estudiar funciones con más variables es conveniente saber bastante sobre funciones de una variable.

Ejemplos. Las funciones en matemáticas vienen dadas usualmente por fórmulas. Por ejemplo.

Ejemplos. 2.

- ***Función constante.*** *Fijemos $a \in \mathbb{R}$, se define la función constantemente igual al valor a por*

$$\begin{array}{rcccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & f(x) & = & a. \end{array}$$

- ***Función identidad.*** *La función*

$$\begin{array}{rcccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & f(x) & = & x, \end{array}$$

que a cada x le hace corresponder a él mismo, se le llama función identidad.

Estos ejemplos son muy sencillos, aún así muchas otras funciones se construyen a partir de ellos.

Operaciones con funciones. Dado que los valores que toman las funciones son números reales, las funciones se pueden operar como los números.

Definición. 4. *Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y un número real $\lambda \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ se definen las siguientes operaciones:*

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Producto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
Producto por un escalar: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
División: *Si $g(x) \neq 0$, entonces* $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Cuando una función es **inyectiva** cabe definir su **función inversa.** Decimos que una función es inyectiva (ver apéndice de Teoría de Conjuntos) si siempre que $f(x) = f(y)$, necesariamente ocurre que $x = y$. Luego cada imagen tiene un único origen en $\mathrm{Dom} f$.

Definición. 5. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inyectiva, se define su función inversa f^{-1} por*

$$\begin{array}{rcccccl} f^{-1} & : & Imf & \to & \mathbb{R} & & \\ & & y & \to & f^{-1}(y) & = & x, \end{array}$$

donde $x \in Domf$ es el único elemento del domino de f para el cuál $f(x) = y$.

Definición. 6. *Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que $Imf \subset Domg$, se define la **composición** de f con g como la función $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que $g \circ f(x) = g(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Con estas operaciones es fácil definir nuevas funciones a través de fórmulas.

Ejemplos. 3.

- *La funciones $f(x) = ax$, $g(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$ se construyen multiplicando una constante por la identidad y multiplicando la identidad consigo misma n-veces respectivamente.*
- ***Funciones polinómicas:***

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

- ***Funciones racionales:***

$$h(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

división de dos polinomios; que tiene sentido siempre que el denominador sea no nulo, $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0$.

- ***Funciones dadas por una serie de potencias:***

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{(x-2)^n}{n!}.$$

Ejercicio. 1. *Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, vamos a calcular su dominio y su imagen; veremos si es inyectiva y por tanto si se puede definir su función inversa.*

Demostración: Para todo $x \in \mathbb{R}$ están definidas las funciones polinómicas $x^2 + 1$ y $x + 1$. Su cociente estará definido si $x + 1 \neq 0$, es decir si $x \neq -1$, como $(-1)^2 + 1 \neq 0$, se tiene que

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} \backslash \{-1.\}$$

Para calcular la imagen de esta función tomemos $y \in \mathbb{R}$. Tenemos que encontrar x de modo que $f(x) = y$, es decir resolver la ecuación

$$y = \frac{x^2+1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - yx + (1-y) = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuya solución será

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 4}}{2}.$$

Esta solución esta definida siempre que

$$y^2+4y-4 = y^2+4y+4-8 = (y+2)^2-(\sqrt{8})^2 = (y+2+\sqrt{8})(y+2-\sqrt{8}) \geq 0.$$

Luego si $y \in \mathbb{R}\backslash(-2-\sqrt{8}, \sqrt{8}-2)$ es el dominio de la función. Por otro lado, cuando y está en la imagen de f podemos encontrar dos valores de x que alcanzan el valor de y, salvo si $y = -2-\sqrt{8}$ o $y = \sqrt{8}-2$. Luego la función no es inyectiva y por tanto no podemos definir su inversa f^{-1} al menos en todo la Imf. $\square$

Ejemplos. 4.

- *Si $x \geq 0$, es claro que la función inversa de $f(x) = x^2$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.*
- *Si n es par y $x \geq 0$, es claro que la función inversa de $f(x) = x^n$ es $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.*
- *Si n es impar, es claro que la función inversa de $f(x) = x^n$ es $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.*

Ejercicio. 2. *Calculemos la función inversa de $f(x) = \frac{2}{4x-5}$*

Demostración: Como antes, si resolvemos la ecuación $y = \frac{2}{4x-5}$ es decir

$$4yx - 5y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5y+2}{4y}$$

encontraremos la imagen de f. La cuál es Im$f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Por otro lado, para cada y de la imagen le corresponde una única x, así la función es inyectiva y existe la inversa que es precisamente $f^{-1}(y) = \dfrac{5y+2}{4y}$ (cuyo dominio es, claro, la imagen de f). $\square$

Ahora nos fijamos en la composición de funciones.

Ejemplos. 5. *Estudiaremos los siguientes ejemplos.*

- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
- $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}}$
- $h(x) = \tan(\frac{\pi}{2}e^{-x})$.

Demostración:

- Si $p(x) = x^2 + 1 \geq 0$, y $q(x) = \sqrt{x}$, como Im$p \subset$ Dom$q$, es claro que $f = q \circ p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- En el caso $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 - x^2}}$, necesitamos que $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$. Luego el dominio de la función es
$$\mathrm{Dom} g = \{x \ : \ x > 1\}.$$
Si pretendemos calcular la imagen, es decir si despejamos la x de la ecuación
$$y = \frac{x}{\sqrt{x^3 - x^2}},$$
lo que es equivalente a calcular g^{-1}, la cosa parece difícil. De hecho, necesitamos conocer más sobre sobre teoría de funciones para afrontar funciones más complejas.
- A lo largo de los temas veremos que son las funciones
$$\ln x, \ e^x, \ \operatorname{sen} x, \ \cos x, \ \tan x, ...etc.$$
También que $\ln x$ es la inversa de e^x; o que la función tangente, $\tan x$, tiene por inversa la función arcotangente, $\arctan x$.

  Ahora, $h(x) = \tan(\frac{\pi}{2} e^{-x})$, como el dominio de la función tangente es $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, necesariamente
$$\frac{\pi}{2} e^{-x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} e^{-x} < \frac{\pi}{2}$$
(como la exponencial es siempre una función positiva)
$$\Leftrightarrow \quad 0 < e^{-x} < 1 \quad \text{y así} \quad x \in (0, \infty) = \mathrm{Dom} h.$$
  Para calcular h^{-1}, tenemos que resolver la ecuación
$$y = \tan(\frac{\pi}{2} e^{-x}) \quad \Leftrightarrow \quad \arctan y = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\ln(\frac{2}{\pi} \arctan y),$$
como la función logaritmo solo está definida para valores positivos, necesariamente $y > 0$. Así
$$h^{-1}(y) = -\ln(\frac{2}{\pi} \arctan y) \quad \text{para todo} \quad y > 0.$$

$\square$

Gráfica de una función. Las funciones tienen una dimensión geometríca que es lo que llamamos sus gráficas. Estas son curvas en el plano, pero a la vez un dibujo donde quedan recogidas las propiedades de las funciones: crecimiento, puntos máximos y mínimos...etc De forma formal, llamamos plano real al conjunto
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definición. 7. *Dada una función real de variable real* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *llamamos **gráfica** de la función al conjunto del plano* $\mathbb{R}^2$*:*

$$Graf f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in Dom f\}.$$

La forma de representar el plano es con dos rectas reales que se cortan perpendicularmente, el eje de **abcisas** o de las **x** y el eje de **ordenadas** o de las **y**. Los puntos del plano (x, y) se representan como se aprecia en la siguiente figura. La gráfica de una función es el dibujo resultante de pintar sobre el plano todos los puntos de los que se compone (ver la figura).

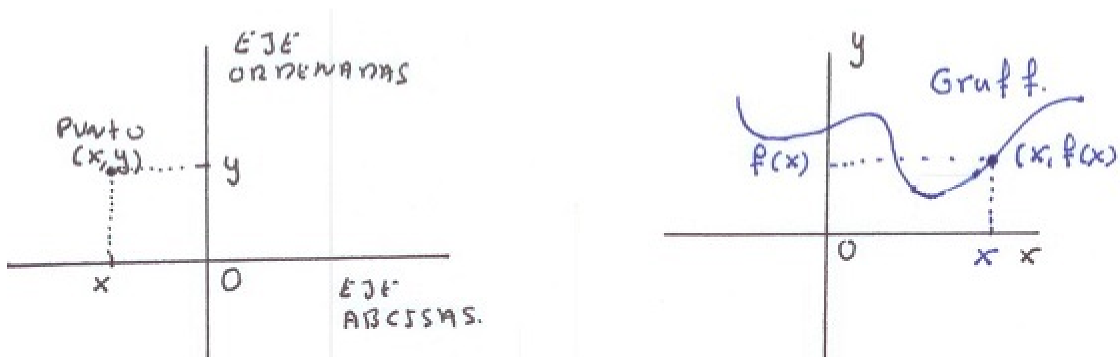

FIGURA 1. El plano real.

Ejemplos sencillos de gráficas nos los proporcionan la función constante y la función identidad. Incluso el valor absoluto de un número real.

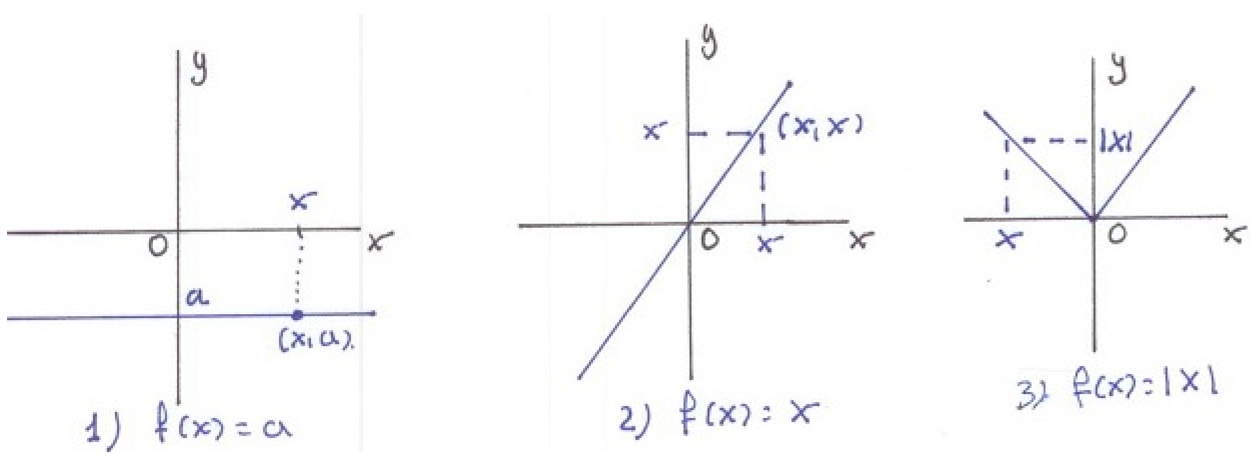

FIGURA 2. 1) $f(x) = a$. 2) $f(x) = x$. 3) $f(x) = |x|$.

La representación de gráficas de funciones con fórmulas más complicadas es un problema más difícil, que iremos viendo poco a poco. El problema de dada una curva en el plano asociarle una fórmula es un problema aún más difícil (pero bastante útil en diseño asistido por ordenador, por ejemplo).

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es