ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

OPERACIONES CON LÍMITES.

De forma análoga a lo que ocurre con los límites de las sucesiones tenemos lo siguiente.

Teorema. 1. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen sus respectivos límites en un punto a, es decir $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b_1$ y $\exists \lim_{x\to a} g(x) = b_2$, entonces*

- *existe* $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b_1 + b_2$;
- *existe* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = b_1 b_2$, *en particular para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *existe* $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b_1$;
- *si* $\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \neq 0$, $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g}{f}(x) = \dfrac{b_2}{b_1}$.
- *Si f y g son continuas en a, entonces las funciones $f+g$, fg, y λf son continuas en a. Si además $f(a) \neq 0$, también $\dfrac{g}{f}$ es continua en a.*

Demostración: Vamos a probar que existe

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = b_1 b_2,$$

el resto de casos se deja como ejercicio. Usaremos la caracterización de límites por sucesiones.

Sea una sucesión convergente a a, $x_n \to_{n\to\infty} a$, entonces tenemos que $\exists \lim_{x\to a} f(x_n) = b_1$ y $\exists \lim_{x\to a} g(x_n) = b_2$. Por tanto la teoría de límites de sucesiones nos dice que

$$\exists \lim_{x\to a} f(x_n) g(x_n) = \lim_{x\to a} fg(x_n) = b_1 b_2,$$

lo que prueba que existe $\lim_{x\to a}(fg)(x) = b_1 b_2$ $\square$

Ejemplos. 1. **Funciones polinómicas:** *La función*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es continua en todos los puntos. Claro, es suma y productos de funciones constantes y la identidad que sabemos que son continuas.

Funciones racionales: *La función*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

es continua en todo los puntos en los cuáles no se anula el denominador.

Así la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$, usando el Teorema anterior, es continua en todo $x \neq 0$ Así de simple. Sin tener que recurrir a ϵ y δ. La definición de límite y continuidad la usaremos cuando no podamos usar los Teoremas de esta sección.

Teorema. 2. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que $Imf \subset Domg$. Si f es continua en a, e.d. existe $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, y g es continua en $f(a)$, e.d. existe $\lim_{x\to f(a)} g(x) = g(f(a))$, entonces $g \circ f$ es continua en a y por tanto existe $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(f(a))$.*

Demostración: Por ser g continua en $f(a)$, **dado** $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta_1 > 0$ de modo que si

$$|y - f(a)| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |g(y) - g(f(a))| < \epsilon.$$

Para este δ_1, por ser f continua en a, **podemos encontrar un** $\delta_2 > 0$ de modo que si

$$|x - a| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \delta_1.$$

Luego si

$$|x-a| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-f(a)| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |g(f(x))-g(f(a))| < \epsilon.$$

Lo que prueba, siguiendo las letras en negrita, que $g \circ f$ es continua en a $\square$

Teorema. 3. ***(de la función Inversa)****. Sea una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida sobre todo un intervalo, inyectica y continua en (a, b). Su función inversa f^{-1} es continua en todo su dominio.*

Demostración: En Cálculo, los Teoremas denominados de la Función Inversa no son fáciles de probar. La prueba de este formalmente la veremos como una aplicación del Teorema de Bolzano un poco más adelante.

El siguiente dibujo es una justificación razonable de lo que dice el Teorema. Observemos que si miramos desde a hacia la gráfica (sentido de la flecha azul) tenemos la gráfica de f. Si lo hacemos desde $f(a)$ hacia la gráfica (sentido de la flecha roja) tenemos la gráfica de f^{-1}. Luego si una es continua la otra también.

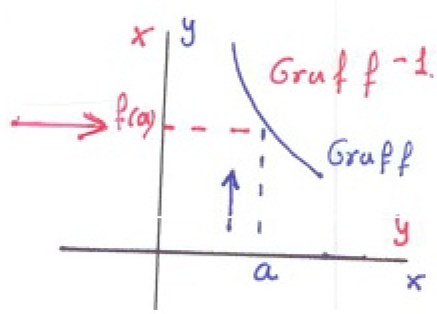

FIGURA 1. Coincidencia de la gráfica de f y f^{-1}.

$\square$

Ejemplos. 2.
- *Como las funciones x^n son continuas en $[0, \infty)$, también lo son sus correspondientes inversas $\sqrt[n]{x}$ en el mismo dominio $[0, \infty)$.*
- *La función $\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x^2-1}}$, es la composición de la función racional $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ con la raíz $g(x) = \sqrt[4]{x}$. Así siempre que $x \neq 1$ o -1, para que f sea continua, y $f(x) \geq 0$, para que este definida la composición, se tendrá que la función compuesta es continua.*

Otras funciones continuas. Las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} x, \cos x$ y $\tan x$ son continuas, así como sus correspondientes inversas en los dominios que les corrsponden. También las funciones exponencial e^x y logaritmo $\ln x$ son continuas. Cuando veamos las definiciones formales de estas funciones justificaremos lo que acabamos de decir.

Ejemplos. 3.
- *La función $\tan(\frac{\pi}{2}e^{-x})$, vimos que tenía por dominio la semirecta $(0, \infty)$. Si $x > 0$, la función $\frac{\pi}{2}e^{-x} \in (0, \frac{\pi}{2}) \subset Dom \tan$ es continua y la composición con la tangente también lo es.*
- *La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es el cociente de dos funciones continuas, luego la función lo es salvo quizas para $x = 0$.*

En este último ejemplo, no sabemos si el límite en $x = 0$ existe, y por tanto no podemos decir si la función es continua en cero o no. Tenemos que estudiar más sobre límites para abordar casos como este y otros parecidos.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es