ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL TEOREMA DE BOLZANO.

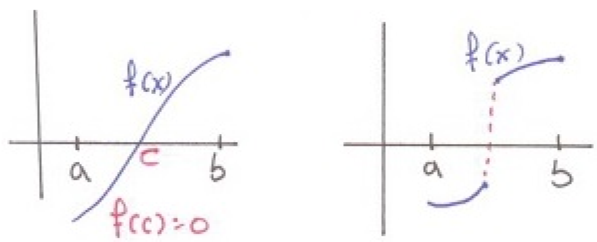

FIGURA 1. Gráfica continua. Gráfica rota.

El **Teorema de Bolzano** es el resultado que nos permite pintar las gráficas de las funciones continuas como curvas de trazo continuo. Esto permite reconocer gráficas, como la que aperece rota en la figura de arriba, como funciones **no** continuas. También es el resultado que nos permite decir si ciertas ecuaciones $f(x) = 0$, donde $y = f(x)$ es una función continua, tiene raíces (ver el primer dibujo de arriba).

Teorema. 1. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua de modo que* $f(a)f(b) < 0$, *entonces existe un punto intermedio* $c \in (a, b)$ *para el cuál* $f(c) = 0$.

Vamos a dar dos demostraciones de este resultado. La primera teórica, que nos va a permitir repasar conocimientos. La segunda es un **algoritmo** que nos permite resolver ecuaciones.

Demostración: (**primera**). Supondremos que $f(a) < 0 < f(b)$, en otro caso se procede de forma análoga (ejercicio).

Como $f(a) < 0$, de la continuidad de f en a ($\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$) existe un $\delta > 0$ de modo que si $x \in [a, a + \delta]$ se tiene que $f(x) < 0$. Por eso si definimos el conjunto

$$A = \{s \in [a, b] \ : \ f(x) < 0 \text{ para todo } x \in [a, s]\,\}$$

este conjunto es no vacío. Y como está acotado superiormente existe

$$\sup A = c.$$

Ahora

- $c < b$. Ya que si suponemos que $c = b$, como $\lim_{x\to b^-} f(x) > 0$, c no puede ser el supremo de A. Claro, ya que existe un $\delta_1 > 0$ de modo que para todo $x \in [b-\delta, b]$ se tiene que $f(x) > 0$, (no existe $s \in A$ de modo que $s \in [b-\delta, b]$).
- Por otro lado si $f(c) > 0$, existe un $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in [c-\delta, c+\delta]$ se tiene que $f(x) > 0$. Como antes, no existe $s \in A$ de modo que $s \in [c-\delta, c+\delta]$. Luego c no puede ser el supremo de A.
- Por un argumento similar, si $f(c) < 0$ nos lleva a que $c < \sup A$. Contradicción.

Luego solo queda la posibilidad de que $f(c) = 0$. $\square$

Demostración: (segunda). De nuevo supondremos que $f(a) < 0 < f(b)$. Tomaremos

$$a_0 = a \qquad \text{y} \qquad b_0 = b.$$

Ahora consideramos el punto medio $r = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

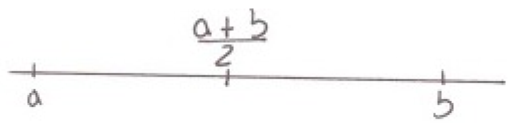

Figura 2. Punto medio.

Estamos ante dos posibilidades,

- si $f(r) \geq 0$, tomamos

$$a_1 = a_0 \qquad \text{y} \qquad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

O bien,

- si $f(r) < 0$, tomamos

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad \text{y} \qquad b_1 = b_0.$$

Así obtenemos en cualquier caso que

$$a_1 < b_1, \quad f(a_1) < 0 \leq f(b_1) \quad \text{ y que } \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Si repetimos el argumento (o **algoritmo**), tomamos el punto medio $r = \dfrac{a_1 + b_2}{2}$. Estamos ante dos posibilidades

- si $f(r) \geq 0$, tomamos

$$a_2 = a_1 \qquad \text{y} \qquad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

O bien,

- si $f(r) < 0$, tomamos
$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad \text{y} \qquad b_2 = b_1.$$

Así obtenemos en cualquier caso que
$$a_2 < b_2, \quad f(a_2) < 0 \leq f(b_2) \quad \text{ y que } \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}.$$

Si seguimos repitiendo este proceso obtendremos dos sucesiones $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$a_n < b_n, \quad f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad \text{ y que } \quad b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = ... = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Además

- por construcción $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es creciente y por tanto existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$;
- por construcción $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y por tanto existe $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$.

Ahora como $a_n < b_n$ para todo n se tiene que $\alpha \leq \beta$ y además
$$\beta - \alpha \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to_{n\to\infty} 0.$$

Luego $\alpha = \beta = c \in (a, b)$. Además, de la caracterización de la continuidad por susesiones (f es continua en c), se sigue que como

- $$a_n \to_{n\to\infty} c \quad \Rightarrow \quad 0 > f(a_n) \to_{n\to\infty} f(c) \leq 0;$$
- $$b_n \to_{n\to\infty} c \quad \Rightarrow \quad 0 < f(b_n) \to_{n\to\infty} f(c) \geq 0.$$

Por tanto $f(c) = 0$, que es lo que queremos demostrar

$\square$

Observación. 1. *Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ de modo que $f(a)f(b) < 0$. El Teorema anterior nos dice que existe un punto $c \in (a, b)$ que es solución de la ecuación. ¿Como encontramos c?*

Demostración: Si f es una función que tiene inversa, entonces $c = f^{-1}(0)$. Esto es lo que se llama **despejar** la x de la ecuación. Aunque como sabemos esto no es siempre posible (ver ejemplo siguiente).

Si fijamos un error $\epsilon > 0$ podemos encontrar un c' de modo que $|c - c'| < \epsilon$, es decir una **aproximación** de la solución. Claro, como $\dfrac{b-a}{2^n} \to_{n\to\infty} 0$, sea

n_0 de modo que $\dfrac{b-a}{2^{n_0}} < \epsilon$. Si tomamos c y $c' = a_{n_0}$ como en la prueba del Teorema anterior, entonces

$$|c - c'| = c - a_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} \leq \frac{b-a}{2^{n_0}} < \epsilon$$

□

Ejemplo. 1. *Vamos a resolver la ecuación*

$$\frac{x^{15} + 7x^2 - 12}{\ln x} - x^2 = 0.$$

Demostración: Despejar la x no parece que sea posible. Así que consideramos la función

$$f(x) = \frac{x^{15} + 7x^2 - 12}{\ln x} - x^2.$$

Vamos a estudiar esta función.

Como la función logaritmo está definida en $(0, \infty)$, donde es continua, y se anula en $x = 1$, tenemos que

$$\mathrm{Dom} f = (0, \infty) \backslash \{1\}.$$

En este dominio la función es continua pués es suma, producto y división de funciones continuas. Calculemos ahora los límites de la función en los extremos de su dominio.

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{15}+7x^2-12}{\ln x} - x^2 = 0^+$; donde 0^+ indica cero por la derecha, por al parte positiva cercana a cero,
- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^{15}+7x^2-12}{\ln x} - x^2 = \infty$.
- $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^{15}+7x^2-12}{\ln x} - x^2 = -\infty$.
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{15}+7x^2-12}{\ln x} - x^2 = \infty$.

Dada que la función es continua, f tendrá una gráfica del tipo

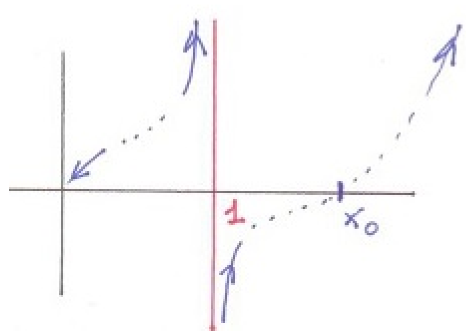

Figura 3. Gráfica aproximada de f .

Ahora tanteando vemos que para $x = 2$,

$$f(2) = \frac{2^{15} + 7 \times 2^2 - 12}{\ln 2} - 2^2 \geq \frac{2^{15}}{3} > 0.$$

Como la función cerca de 1^+ es negativa, el Teotema de Bozano nos dice que nuestra ecuación tiene al menos una solución x_0 entre 1 y 2. Además, de la prueba del teorema, sabemos que $|x_0 - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$ $\square$

Un resultado más general que el Teorema de Bolzano es el siguiente.

Corolario. 1. ***(Conservación de la conexión.)*** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si λ es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ de modo que $f(c) = \lambda$.*

Demostración: Supongamos que $f(a) < \lambda < f(b)$, (el caso $f(a) > \lambda > f(b)$, se resuelve poniendo h=-f y entonces $h(a) < -\lambda < h(b)$). Gráficamente parece claro,

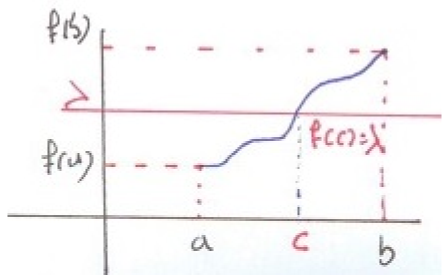

FIGURA 4. Gráfica aproximada de f .

si tenemos que ir del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ del plano con un trazo continuo éste tendrá que cortar a la recta $y = \lambda$. Formalmente, consideramos la función

$$\begin{array}{ccccccc} g & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & g(x) & = & f(x) - \lambda. \end{array}$$

g es una función continua por ser diferencia de funciones continuas. Además, $g(a)g(b) < 0$, así por el Teorema de Bolzano existe un $c \in (a, b)$ con

$$0 = g(c) = f(c) - \lambda \quad \Rightarrow \quad f(c) = \lambda$$

$\square$

Observación. 2. *Después de estos dos resultados queda claro que las gráficas de las funciones continuas tienen que ser trazos continuos.*

Una aplicación que dejamos pendiente de este resultado es el Teorema de la Función Inversa. Antes un Lema.

Lema. 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $c \in (a,b)$. Si $f(c) < f(a), f(b)$ o bien $f(a), f(b) < f(c)$, entonces f no es inyectiva.*

Demostración: Teniendo en cuenta el Corolario de la conservación de la conexión, los siguientes dibujos nos convencerán de que lo que se afirma es cierto.

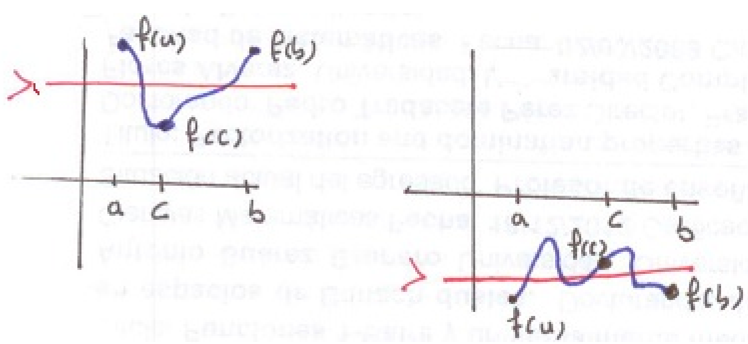

FIGURA 5. Demostración sin palabras.

□

Teorema. 2. *(de la Función Inversa). Sea una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ definida sobre todo un intervalo, inyectica y continua en (a,b). Su función inversa f^{-1} es continua en todo su dominio.*

Demostración: Sea $c \in (a,b)$ y consideremos $f(c) \in \mathrm{Dom} f^{-1}$. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $r > 0$ de modo que

$$c - \epsilon < c - r < c < c + r < c + \epsilon \quad \text{y con} \quad (c-r, c+r) \subset (a,b).$$

Entonces, de la continuidad de f y por ser inyectiva (ver Lema), o bien $f(c-r) < f(c) < f(c+r)$ o bien $f(c-r) > f(c) > f(c+r)$. Consideraremos el primer caso, en el otro se procede de manera análoga.

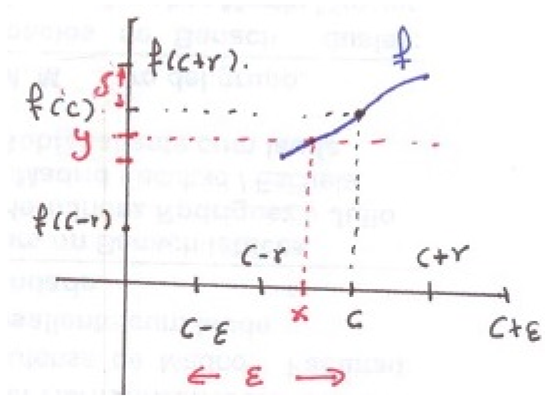

Figura 6. Función inversa.

Sea $\delta = \text{mín}\{\, f(c) - f(c-r), f(c+r) - f(c)\,\} > 0$. Entonces para todo $|y - f(c)| < \delta$, existe (por el corolario anterior) $x \in (c-r, c+r)$ de modo que $f(x) = y$, luego por ser f^{-1} inyectiva, para todo $|y - f(c)| < \delta$, se tiene que

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c))| = |x - c| < r < \epsilon,$$

lo que prueba la continuidad de f^{-1} en $f(c)$ $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es