HOJA 4ª

PROBLEMA 1º

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad x = 0$

PARA QUE f SEA DERIVABLE EN $x=0$ TIENE QUE EXISTIR

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{2/3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

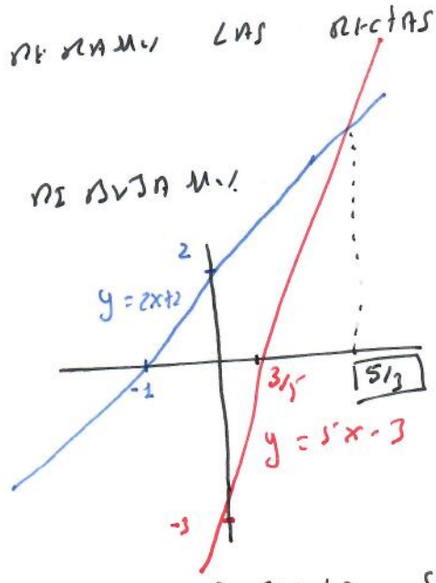
Y ESTE LÍMITE NO EXISTE

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty \quad y \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

c) $f(x) = \text{máx}\{2x+2,\ 5x-3\}$ $\quad x = 5/3$

CONSIDERAMOS LAS RECTAS $y = 2x+2$ e $y = 5x-3$

SI LAS DIBUJAMOS



LAS RECTAS SE CORTAN EN

$$2x+2 = 5x-3$$

$$\Leftrightarrow 5 = 3x$$

$$x = 5/3$$

LUEGO $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{SI } x \le 5/3 \\ 5x-3 & \text{SI } x > 5/3 \end{cases}$

AHORA $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(5/3+h)-f(5/3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{5(\cancel{5/3}+h)-\cancel{3}-(\cancel{5\cdot 5/3}-\cancel{3})}{h} = 5$

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(5/3+h)-f(5/3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(5/3+h)+2-(2\cdot 5/3+2)}{h} = 2$

LUEGO NO EXISTE $f'(5/3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5/3+h)-f(5/3)}{h}$.

HOJA 4:

PROBLEMA 2:

$f(x) = 3x^5 - 3x^2 + x - 3 \qquad f'(x) = 15x^4 - 6x + 1$

$f(x) = |x^2 - 3x + 2| \qquad x > 3$ SI $x > 3 \Rightarrow x^2 > 3x$

LUEGO $f > 0$ SI $x > 0$

ASÍ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ Y $f'(x) = 2x - 3$.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ USANDO LA REGLA DE DERIVACIÓN PARA UN COCIENTE.

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2-4x+5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}.$$

$f(x) = x e^{-x} + x^2 \ln x$ USANDO LA REGLA DE DERIVACIÓN PARA UN PRODUCTO Y LAS DERIVADAS DE e^x Y $\ln x$

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} + 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} =$$

$$= e^{-x}(1-x) + 2x \ln x + x$$

$f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1} \qquad f'(x) = \dfrac{(\ln x + 1)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} = \dfrac{-\ln x + x - 1}{(x-1)^2}.$

USANDO LA REGLA DE LA CADENA

$f(x) = 3\cos^3 x - 7x \operatorname{sen}^2 x \qquad f'(x) = 9\cos^2 x(-\operatorname{sen} x) - 7\operatorname{sen}^2 x - 14x \operatorname{sen} x \cos x.$

$f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1} \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{x^2-1}$

$f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad f'(x) = \dfrac{1}{(4-x^2)}\left[3x^2\sqrt{4-x^2} + x^3 \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right]$

$f(x) = \operatorname{Arctn}(\cos x + \operatorname{sen} x) \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1 + (\cos x + \operatorname{sen} x)^2} \cdot [\cos x - \operatorname{sen} x]$

$f(x) = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 \qquad f'(x) = 2\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \dfrac{\cos^2 x + (1 + \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$

$$= 2\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}.$$

HOJA 4:

PROBLEMA 3)

1) $y = \ln(\ln|x|)$ $\quad (e, 0)$

$f(x) = \ln(\ln|x|) = \ln(\ln x)$ si $x > 0$

$f(e) = \ln(\ln e) = \ln 1 = 0$

$f'(x) \underset{\text{REGLA DE LA CADENA}}{=} \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$ luego $f'(e) = \frac{1}{\ln e} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$.

LA RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA DE f EN EL PUNTO $(e, 0)$ ES LA RECTA

$y = ax + b$ DONDE LA PENDIENTE $a = \frac{1}{e}$

$y = \frac{1}{e}x + b$ Y PARA $x = e$ $y = 0$

LUEGO $b = -1$

$$\boxed{y = \frac{1}{e}x - 1}$$

2) $y = x^3 \operatorname{sen} x + 1$ $\quad (\pi, 1)$

$f(x) = x^3 \operatorname{sen} x + 1$ $\quad f(\pi) = \pi^3 \operatorname{sen} \pi + 1 = 1$

$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x$ Y ASÍ $f'(\pi) = 3\pi^2 \operatorname{sen} \pi + \pi^3 \cos \pi = -\pi^3$

LA RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA DE f EN EL PUNTO $(\pi, 1)$ ES LA RECTA

$y = ax + b$ DONDE LA PENDIENTE $a = -\pi^3$

$y = -\pi^3 x + b$ Y AHORA $x = \pi$ $y = 1$

$1 = -\pi^4 + b$ LUEGO $b = 1 + \pi^4$

$$\boxed{y = -\pi^3 x + \pi^4 + 1}$$

HOJA 4

PROBLEMA 5:

$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$ si $x \simeq 0$

La recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{1+x}$ por el punto $(0,1)$ es

$$y = f'(0)x + b$$

Así $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ luego $f'(0) = \frac{1}{2}$

Luego $y = \frac{1}{2}x + 1$ como tiene que pasar por el punto $(0,1)$ $1 = \frac{1}{2}0 + b$

Así la recta tangente es

$$r(x) = 1/2\, x + 1$$

y satisface que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - r(x)}{x} = 0.$$

$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$ si $x \simeq 0$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ $f(0) = 1$; la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(0,1)$ es

$$y = f'(0)x + b$$

$f'(x) = \frac{-1-x}{(1+x)^2}$ $f'(0) = -1$; así

$y = -x + b$ como pasa por $(0,1) \Rightarrow b = 1$

y $r(x) = -x + 1$ es la recta tangente buscada

satisface que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - r(x)}{x} = 0.$$

HOJA 4:

PROBLEMA 7:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi x & \text{si } x < -1 \\ 2 + x^2 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ 1 + e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

CADA UNA DE LAS FUNCIONES $\operatorname{sen} \pi x$, $2+x^2$ y $1+e^{-x}$ SON CONTINUAS Y DERIVABLES EN TODO $\mathbb{R}$.

ADEMÁS $f(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} \operatorname{sen} \pi x = 0$

$f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} 2 + x^2 = 3$

LUEGO f NO ES CONTINUA EN $x = -1$

ADEMÁS $f(0^-) = \lim_{x \to 0} 2 + x^2 = 2$

$f(0^+) = \lim_{x \to 0} 1 + e^{-x} = 2$

ASÍ f ES CONTINUA EN $x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

$\boxed{\text{COMO } (2 + x^2)' = 2x}$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$$

$\boxed{\text{COMO } (1 + e^{-x})' = -e^{-x}}$

LO QUE DEVIENE QUE f NO ES DERIVABLE EN $x = 0$

$$m(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \ln(e \cos(x-1)) & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

$m(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = 1$ YA QUE $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

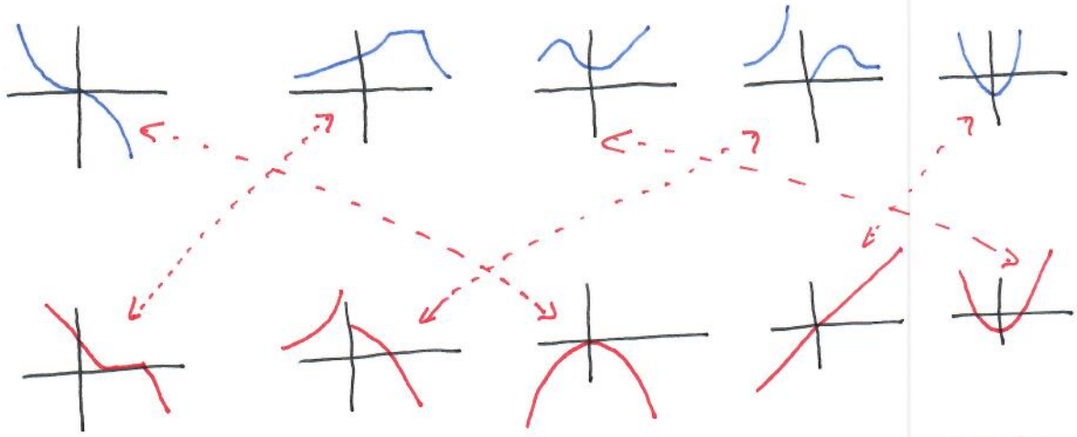
$m(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \ln(e \cos(x-1)) = 1$

LUEGO m ES CONTINUA EN $x = 1$

AHORA EXISTE $m'(1) = 0$ $\begin{cases} \lim_{h \to 0^-} \dfrac{m(1+h) - m(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{\frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1}{h} \overset{\text{L'HOPITAL}}{=} 0 \\ \lim_{h \to 0^+} \dfrac{m(1+h) - m(1)}{h} = (\ln(e \cos(x-1)))'\Big|_{x=1} = \dfrac{-\cancel{e} \operatorname{sen} x - 1}{\cancel{e} \cos(x-1)}\Big|_{x=1} = 0 \end{cases}$

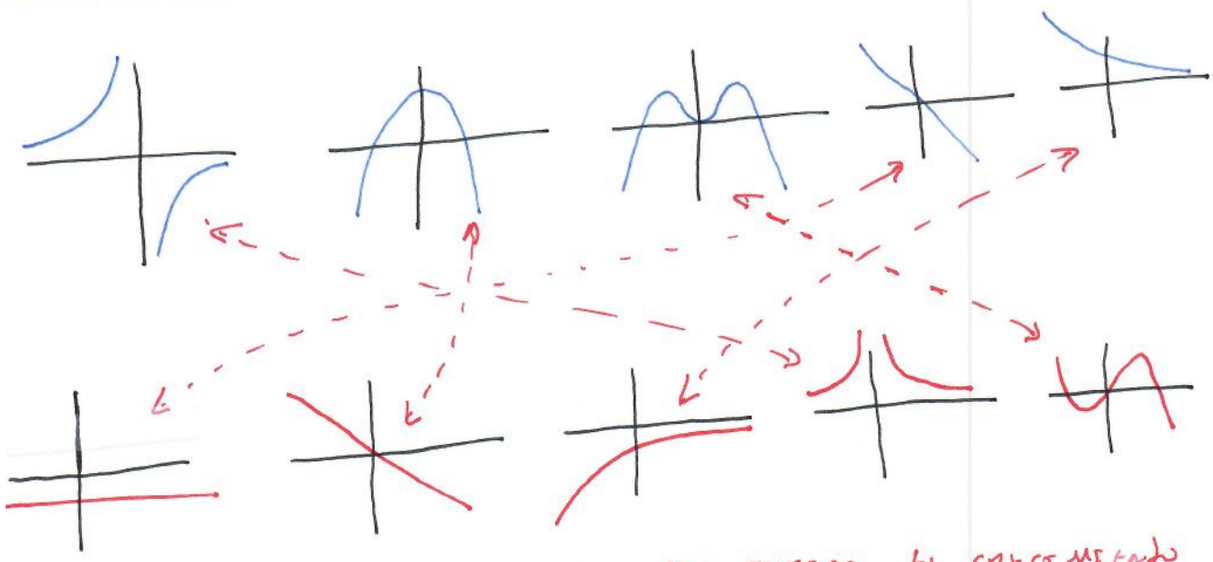
HOJA 4:

PROBLEMA 8



EL SIGNO DE LA DERIVADA NO INDICA EL CRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN

PROBLEMA 9:



EL SIGNO DE LA DERIVADA NO INDICA EL CRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN.

HOJA 4:

PROBLEMA 10:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

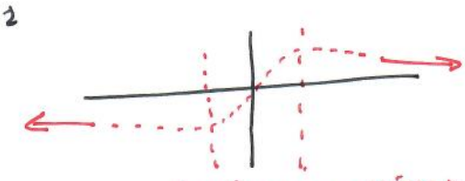
Dom $f = \mathbb{R}$; $f(x)<0$ si $x<0$ y $f(x)>0$ si $x>0$

$f(-x) = -f(x)$ es IMPAR

LÍMITES

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$ $y=0$ ASÍNTOTA HORIZONTAL

LUEGO

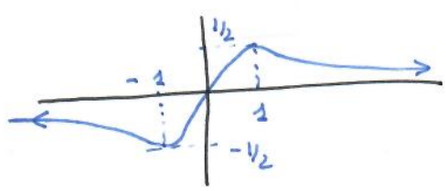


¿MÍNIMO y MÁXIMO?

DERIVADA

$$f'(x) = \frac{x^2+1 - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \begin{cases} >0 & \text{si } x\in(-1,1) \\ =0 & \text{si } x=-1 \text{ ó } 1 \\ <0 & \text{si } |x|>1 \end{cases}$$

LUEGO



$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$$

Dom $f = \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$; $f(x)=f(-x)$ PAR ; $f(-2)=f(2)=0$

LÍMITES

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-9} = 1$$ $y=1$ ASÍNTOTA HORIZONTAL

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to3^+} f(x) = \infty ;$$

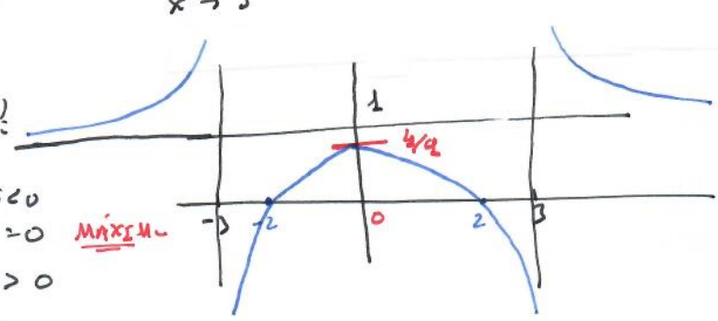
$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$$

$x=-3$ y $x=3$ ASÍNTOTAS VERTICALES

DERIVADA

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-9) - 2x(x^2-4)}{(x^2-9)^2} = \frac{-10x}{(x^2-9)^2} \begin{cases} >0 & x<0 \\ =0 & x=0 \\ <0 & x>0 \end{cases}$$

MÁXIMO



HOJA 4:

PROBLEMA 10:

$$f(x) = \frac{1}{|x| \ln |x|}$$

OBSERVEMOS QUE $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$; $f(x) = f(-x)$ f ES PAR

$f < 0$ SI $|x| < 1$

$f > 0$ SI $|x| > 1$

LÍMITES

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{|x| \ln |x|} = 0$$

$y = 0$ ASÍNTOTA HORIZONTAL

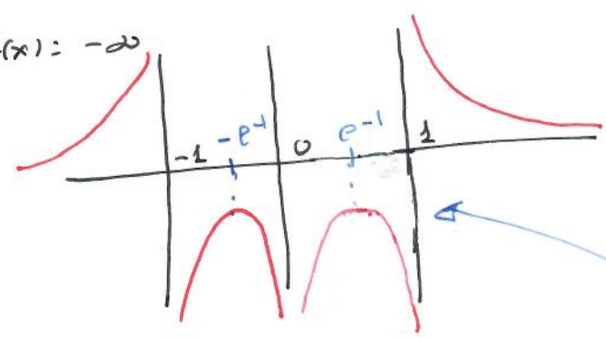
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$$

$x = -1$ y $x = 1$ ASÍNTOTAS VERTICALES

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ ASÍNTOTA VERTICAL

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$



DERIVADA $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \qquad f'(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2}$$

LUEGO PARA e^{-1}

Y POR SER PAR $-e^{-1}$ TENEMOS QUE LA DERIVADA SE ANULA Y TENEMOS UN MÁXIMO

HOJA 4:

PROBLEMA 10: $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

$\text{Dom } f = [0, \infty)$

LÍMITE

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x \ln x}{x-1}}_{\to 1} = \infty$$

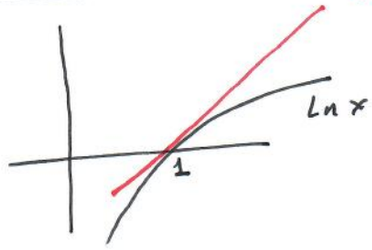
DERIVADA

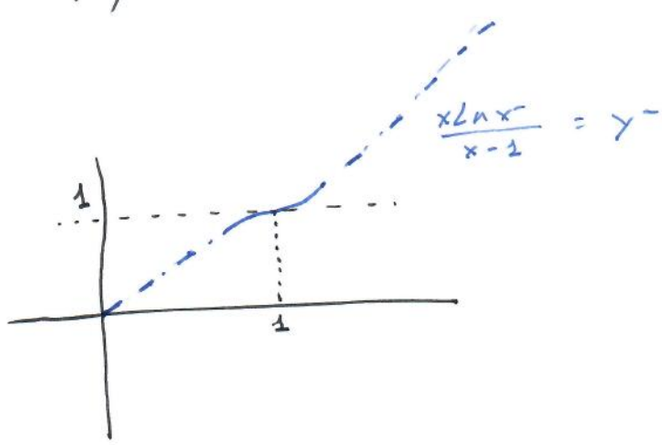
$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\left[(\ln x + 1)\cancel{(x-1)} - \cancel{x \ln x}\right] =$$

$$= \frac{-\ln x + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} \begin{cases} > 0 & \text{SI } x \in (0,1) \\ = 0 & \text{SI } x = 1 \\ > 0 & \text{SI } x > 1 \end{cases}$$

OBSERVACIÓN

$y = x - 1$ tangente a $\ln x$ en $(1, 0)$





HOJA 4:

PROBLEMA 10) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}\left[2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = -\infty$$ $x = 0$ asíntota vertical

$\text{Dom} f = (0, \infty)$.

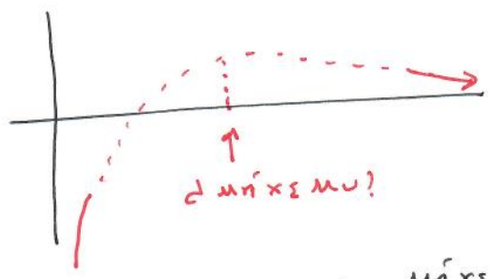
LÍMITE $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0$ $y = 0$ asíntota horizontal

observamos que si $x > 1$, entonces $x > \sqrt{x}$

y por tanto $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ luego

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} > 0 \quad \text{si} \quad x > 1$$

así

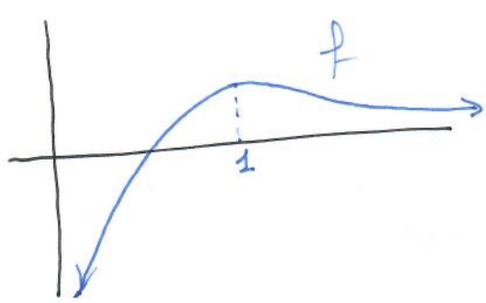


tenemos que buscar un máximo

derivamos $f'(x) = \frac{-2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^2}$

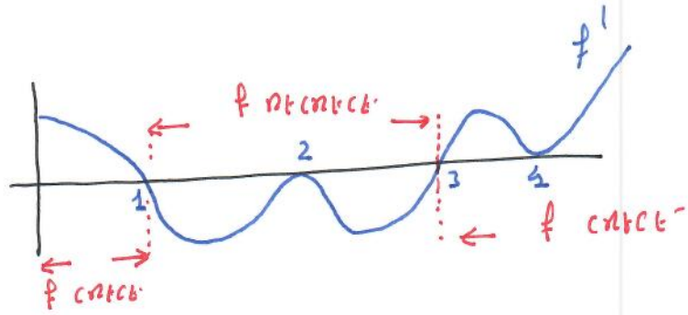
$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ luego $x = 1$

es el máximo de esta función



HOJA 4:

PROBLEMA 11:



f tiene un máximo en $x=1$

f tiene un mínimo en $x=3$

PROBLEMA 12:

El radio de la gota esférica depende del tiempo t.

El volumen de una esfera de radio r(t) viene dado por la fórmula

$$V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \qquad (*)$$

Por hipótesis

$$\frac{d\,V(r(t))}{dt} = -k\,S(r(t)) = -k\,4\pi r^2(t)$$

(donde $k>0$, signo negativo ya que V decrece; y $4\pi r^2(t)$ es la superficie de la esfera).

Por otro lado derivando (*) (aplicando la regla de la cadena)

$$\frac{d\,V(r(t))}{dt} = V'(r(t))\cdot r'(t) \underset{(*)}{=} 4\pi r^2(t)\, r'(t)$$

Igualando ambas derivadas

$$-k\,\cancel{4\pi r^2(t)} = \cancel{4\pi r^2(t)}\, r'(t)$$

y así $r'(t) = -k$

El decrecimiento de r se hace a una velocidad (ritmo) $r' = -k$ constante.

HOJA 4:

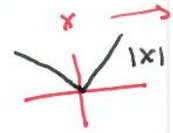
PROBLEMA 13: $f(x) = |4x-3| - x^2$

Como $4x-3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{4}$

tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} 4x-3-x^2 & \text{si } x \geq 3/4 \\ -4x+3-x^2 & \text{si } x < 3/4 \end{cases}$$

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$ y f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser composición y suma de funciones continuas. (La función $|\ |$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to |x|$ es continua)



$$f'(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{si } x > 3/4 \\ -4-2x & \text{si } x < 3/4 \end{cases}$$

$f'(3/4^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3/4+h) - f(3/4)}{h} = 5/2$

$f'(3/4^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3/4+h) - f(3/4)}{h} = -\frac{13}{2}$

f no es derivable en $x = 3/4$

Por otro lado

$(\bullet)$ $4-2x = 0 \iff x = 2 > 3/4$ $\quad \begin{cases} 4-2x > 0 & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 2) \\ 4-2x < 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Luego } x = 2 \text{ es un máximo relativo}}$

$(\bullet\bullet)$ $-4-2x = 0 \iff x = -2 < 3/4$ $\quad \begin{cases} -4-2x < 0 & \text{si } x \in [-2, \frac{3}{4}) \\ -4-2x > 0 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Luego } x = -2 \text{ es un máximo relativo}}$

$\boxed{x = 3/4 \text{ es un mínimo aunque } f'(3/4) \neq 0}$

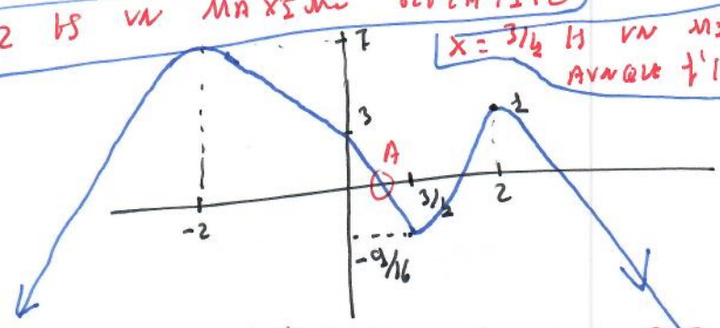
Además $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f(3/4) = -9/16$

$f(-2) = 7$

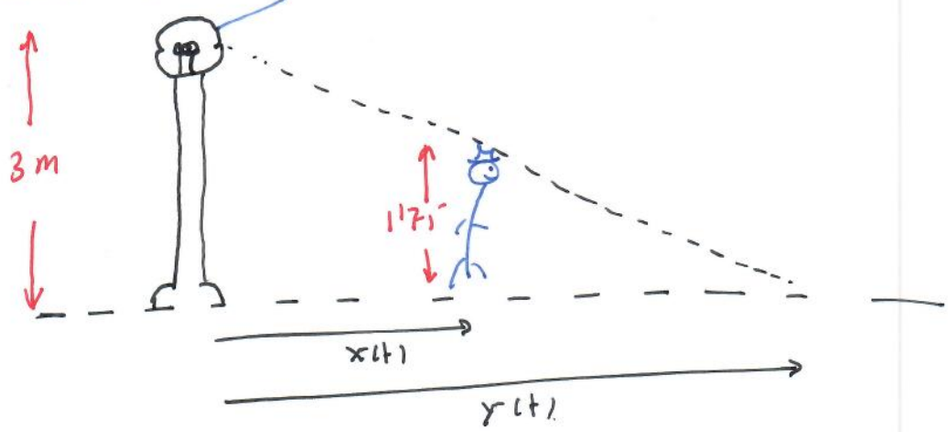
$f(2) = 1$



$f(0) = 3$
$f(2/3) = -1/3$ $\Big\}$ $A \in [0, 2/3]$ por Bolzano

HOJA 4:

PROBLEMA 14:



t tiempo

$x(t)$ posición del ratón

$x'(t) = 1\,m/s$ luego $x(t) = t + k$

$y(t)$ longitud de la sombra

Por semejanza de triángulos (o por el teorema de Tales) sabemos que:

$$\frac{y(t)}{y(t) - x(t)} = \frac{3}{1'75}$$

Así $(1'75)\,y(t) = 3\,(y(t) - x(t))$

Como nos interesa la velocidad de la sombra $y'(t)$, derivamos

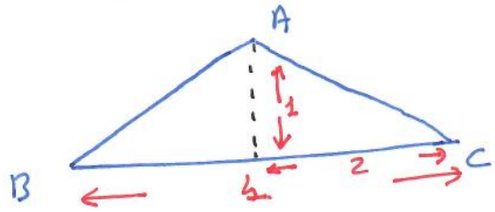
$$(1'75)\,y'(t) = 3\,y'(t) - 3\,x'(t) \qquad x'(t) = 1$$

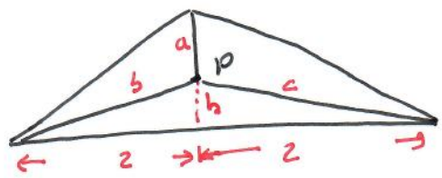
luego $(-1'25)\,y'(t) = -3$

$$\Leftrightarrow \boxed{y'(t) = \frac{3}{1'25}\ m/s.}$$

HOJA 4:

PROBLEMA 15º)





$a = 1-h$

$b = c = \sqrt{h^2+4}$

↓

TORSIÓN GRO ISOSCELES

LA SUMA DE DISTANCIAS DE P A LOS VÉRTICES ES $D(h) = (1-h) + 2\sqrt{h^2+4}$ $h \in [0,1]$.

ESTUDIEMOS LA FUNCIÓN CONTINUA D.

$D(0) = 1 + 4 = 5$

$D(1) = 2\sqrt{5} < 5$ (YA QUE $4 \cdot 5 < 25$.)

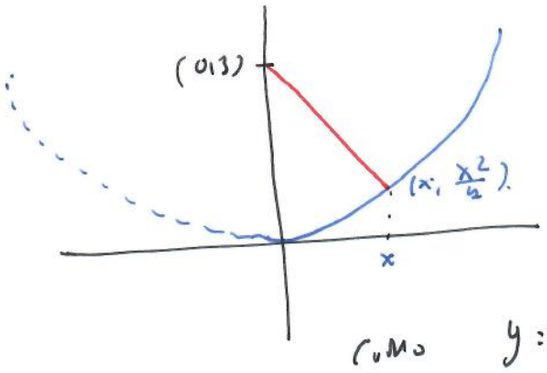
$D'(h) = -1 + 2\dfrac{\cancel{2}h}{\cancel{2}\sqrt{h^2+4}} = \dfrac{2h - \sqrt{h^2+4}}{\sqrt{h^2+4}} \leq 0$ $h \in [0,1]$

YA QUE $2h \leq 2$ Y $\sqrt{h^2+4} \geq 2$ SI $h \in [0,1]$

LUEGO EL MÍNIMO DE LA FUNCIÓN D SE ALCANZA EN EL EXTREMO $h = 1$, LUEGO $P = A$.

HOJA 4:

PROBLEMA 16:



$d((0,3),(x,\frac{x^2}{4}))$ $x>0$ MÍNIMO

$$= \sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{4}-3\right)^2}$$

COMO $y=\sqrt{x}$ ES CRECIENTE, BUSCAMOS

MINIMIZAR $d(x) = x^2+\left(\frac{x^2}{4}-3\right)^2$

DERIVANDO $d'(x) = 2x + \cancel{2}\left(\frac{x^2}{4}-3\right)\frac{x}{\cancel{2}} =$

$= x\left[2+\frac{x^2}{2}-3\right]$

$= x\left[\frac{x^2}{4}-1\right]$

$d'(x)=0 \iff x=0$ O BIEN $x=\pm 2$.

POR OTRO LADO $\frac{x^2}{4}-1 \begin{cases} >0 & \text{SI } x>2 \\ <0 & \text{SI } x<2 \end{cases}$

LUEGO d TIENE EN $x=2$ UN MÍNIMO LOCAL.

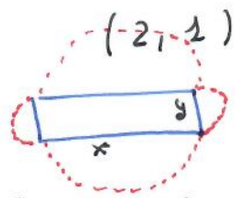
AHORA $d(0)=9$.

$d(2) = 4+4 = 8$.

EL MÍNIMO BUSCADO SE ALCANZA PARA $x=2$

EN EL PUNTO $(-2,-1)$.

PROBLEMA 17:

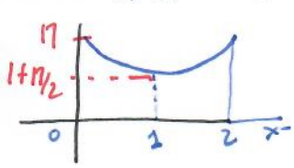


$2x+2y=4 \Rightarrow y=\frac{4-2x}{2}=2-x$

AHORA $A = x(2-x) + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 =$

$= 2x - x^2 + \pi\frac{x^2}{4} + \frac{\pi}{4}(x^2-4x+4) = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)x^2 + (2-\pi)x + \pi$ $x\in[0,2]$

$A'(x) = 2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)x + (2-\pi) = 0 \iff x = \frac{\pi-2}{\pi-2} = 1 \in [0,2]$ MÍNIMO



$A(0) = \pi$.

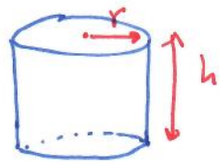
$A(2) = \pi$

$A(1) = 1+\pi/2$

LUEGO $\boxed{1+\frac{\pi}{2} \le A(x) \le \pi.}$

HOJA 4:

PROBLEMA 18:



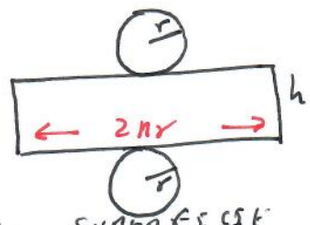
El volumen del cilindro

$V =$ Área de Base $\times h =$

$= \pi r^2 \cdot h = 1\ \ell$

Luego $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

Por otro lado



El material usado en la superficie del cilindro es

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \qquad r \in (0, \infty)$$

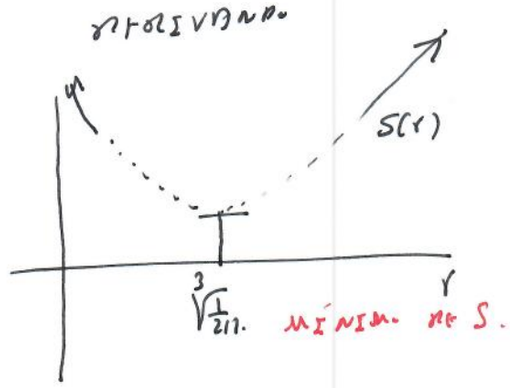
Hay que minimizar S. Notemos

$S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2} = 0$

$\iff 4\pi r = \dfrac{2}{r^2}$

$\iff 2\pi r^3 = 1$

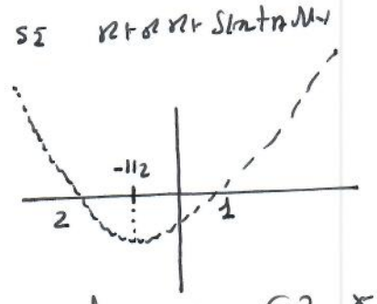
Luego $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$



PROBLEMA 19:

2) $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 + x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x^2 + x - 2 < 0\}$

Sea $f(x) = x^2 + x - 2$ $\quad x \in \mathbb{R}$ Se representa la gráfica de f



$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

$f'(x) = 2x + 1 \begin{cases} < 0 & \text{si } x < -1/2 \\ = 0 & x = -1/2 \\ > 0 & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$

$f(x) = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0$

$\iff x = 1$ y $x = -2$

Luego $f(x) < 0 \iff x \in (-2, 1)$.

Así $\sup A = 1$

$\inf A = -2$

Como $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, 1 y -2 no pueden ser ni máximo ni mínimo. De otra forma como $A = (-2, 1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ en ningún caso -2 y 1 pueden máximo o mínimo respectivamente.

HOJA 4:

PROBLEMA 20: a) $\lim_{x\to\infty} f(x+1)-f(x) =$

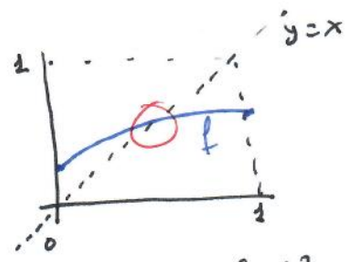
TEOREMA VALOR MEDIO

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\in(x,x+1)}} f'(y)(x+1-x) = \lim_{y\to\infty} f'(y) = A.$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(y)(2x-x)}{x} = \lim_{y\to\infty} f'(y) = A$$

TEOREMA VALOR MEDIO

PROBLEMA 22:



SUPONGAMOS QUE $\exists\, x, y \in [0,1]$ CON $x<y$ e $f(x)=x$, $f(y)=y$

ENTONCES $\boxed{|y-x|} = f(y)-f(x) = \boxed{f'(c)(y-x)}$ $c\in(x,y)$

TT VALOR MEDIO

PERO ENTONCES $f'(c)=1$, LO CUAL ES CONTRARIO A LA HIPÓTESIS.

PROBLEMA 24: $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $g(x) = \operatorname{sen} x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) x \operatorname{sen} 1/x = 0$$

YA QUE $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ Y ASÍ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$

ADEMÁS $|x \operatorname{sen} 1/x| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

POR OTRO LADO $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

AHORA $2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ y $\cos\frac{1}{x} \not\xrightarrow[x\to 0]{}$, LUEGO EL LÍMITE NO EXISTE.

$\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

HOJA 4:

PROBLEMA 25:

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{\cos^2 x\pi/2} = \lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{(x-1)^2}{\cos^2 x\pi/2}}{(x-1)^2} = (*)$$

AHORA $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos x\pi/2} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{-\pi/2 \operatorname{sen} x\pi/2} = -\frac{2}{\pi}.$$

LUEGO $$\lim_{x\to 1} 1 - \left(\frac{x-1}{\cos x\pi/2}\right)^2 = 1 - \frac{4}{\pi^2} \neq 0 \quad \left(1-\frac{4}{\pi^2} > 0\right)$$

DE LO QUE SE SIGUE QUE $(*) = \infty$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-\sqrt{x}} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}+e^{x}-2}{e^{2x}-3e^{x}+2} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}+e^{x}}{2e^{2x}-3e^{x}} = \frac{4}{-1} = -4.$$

OBSERVEMOS QUE EN TODOS LOS CASOS EN LOS QUE HEMOS APLICADO L'HÔPITAL HASTA LA CUARTA CONSECUTIVA INDETERMINACIÓN.

PROBLEMA 26:

a) $f:(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = 1/x$; $\forall x \in (0,1)$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$;

$(0,1) = \operatorname{Dom} f$ está acotado, pero f no lo está, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

b) EL MISMO EJEMPLO DE a) SIRVE.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, ASÍ f ES DECRECIENTE EN $(0,1)$ LUEGO NO PUEDE TENER NI MÁXIMO ($\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$) NI MÍNIMO ($\inf\{f(x) : x \in (0,1)\} = 1 = 1/1$, PERO $1 \notin (0,1)$).