CÁLCULO

6. La Integral. Cálculo de Primitivas.

$*$ **6.1.** Sea $f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in [0,2]\backslash\{1\} \quad \text{y} \quad f(1) = 2.$
a)Dibuja la gráfica de f.
b) Calcula el área del rectángulo $[0,2] \times [0,1]$.
c) Para cada $k \in \mathbb{N}$, se considera la partición del intervalo $[0,2]$

$$P_k = \{0, 1 - \tfrac{1}{k}, 1 + \tfrac{1}{k}, 2\}$$

Sea $S_k = 1 \times ((1 - \dfrac{1}{k}) - 0) + 2 \times ((1 + \dfrac{1}{k}) - (1 - \dfrac{1}{k})) + 1 \times (2 - (1 + \dfrac{1}{k}))$. ¿Qué área, dibújala, se corresponde al valor de S_k?
d) Calcula $\lim_{k\to\infty} S_k$.
e) ¿Coinciden los resultados de b) y d)?

6.2. Si

$$[x] = \max\{\, k \in \mathbb{Z} \;:\; k \le x \,\},$$

representa la parte entera del número x, calcula $I_n = \displaystyle\int_0^n [x]dx$ y $*$ $\displaystyle\int_1^n x[x]dx$, con $n \in \mathbb{N}$.

$*$ **6.3.** a) Encuentra una función $f(x) \ge 0$, no nula, de modo que $\int_a^b f(x)dx = 0$
b) Supongamos que $f \ge 0$ y que f es continua en $[a,b]$. Si $\int_a^b f = 0$, prueba que $f(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$.

6.4. Prueba que $1/2 \le \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \le 1$ y que $\dfrac{\pi}{2} \le \displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx \le \pi$.

Encuentra cotas superiores e inferiores para las siguientes integrales:

$*$ a) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x dx$ $\qquad *$ b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ $\qquad *$ c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$.

6.5. Acudiendo a razonamientos geométricos, demuestra que:
a) $\displaystyle\int_0^1 x^n dx + \int_0^1 x^{1/n}dx = 1, n \in \mathbb{N}.$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx + \int_0^1 e^x dx = e.$

$*$ **6.6.** Cuatro estudiantes de informática no se ponen de acuerdo sobre el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x dx$. Antonio dice que vale π, Beatriz que es igual a $35\pi/128$; Carlos dice que vale $\dfrac{3\pi}{90} - 1$, mientras que Diana se inclina por $\pi/2$. Uno de los cuatro está en lo cierto. ¿Quién es? (No intentes calcular la integral. Dibuja la gráfica de la función).

6.7. Si la función f es continua en $[0,1]$, se puede probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n) \right) = \int_0^1 f.$$

Utiliza lo anterior para calcular $\displaystyle\int_0^1 x dx$ y $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$. (**Indicación:** usa el ejercicio 1.2. de la Hoja 1.).

$*$ significa, problema propio del grupo.

$*$ **6.8.** Relaciona los límites y las integrales siguientes. Deja para el final de la hoja calcular cada uno de ellos.

1) $\displaystyle\int_0^1 a^x dx;\qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1),\quad$ con $\quad a>0.$

2) $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx;\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+1/n)(1+2/n)...(1+n/n)}.$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx;\qquad \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}).$

4) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}dx;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$

6.9. Deriva F, definida sobre $[0,1]$ por:

1) $F(x)=\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt\qquad$ 2)$F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}(1+t^3)^{-1}dt$

3) $F(x)=\displaystyle\int_0^{g(x)} f(t)dt$, con g derivable y f continua $\qquad$ 4) $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^x \sqrt{1-t^2}dt$

5) $F(x)=\displaystyle\int_0^{\ln x} e^{-t^2}dt\qquad$ 6) $F(x)=\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x}\cos t dt.$

6.10. Sea $F(x)=\displaystyle\int_0^x -3t^2+24t-45dt$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) F es decreciente en $\mathbb{R}\qquad$ b) La ecuación $F(x)=0$ tiene tres raíces reales.

c) $F(x)<0\quad$ si $\quad x<0.\qquad$ d) F es convexa si $x<4$.

6.11. Calcula las siguientes primitivas elementales.

$*$ a) $\displaystyle\int 3xdx\qquad$ $*$ b) $\displaystyle\int x^4dx\qquad$ c) $\displaystyle\int 4x^6+3x^2+1dx\qquad$ d) $\displaystyle\int(3x-2)^2dx$

$*$ e) $\displaystyle\int \cos xdx\qquad$ $*$ f) $\displaystyle\int \operatorname{sen} xdx\qquad$ g) $\int 3\cos x+2\operatorname{sen} xdx\qquad$ h) $\displaystyle\int 2x\cos x^2dx$

$*$ i) $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx\qquad$ j) $\int\frac{1}{x^k}dx$ con $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\qquad$ $*$ k) $\int e^xdx\qquad$ l) $\displaystyle\int\frac{2x}{(x^2-3)^4}dx$

$*$ m) $\displaystyle\int\cosh xdx\qquad$ $*$ n) $\displaystyle\int\operatorname{senh} xdx\qquad$ ñ) $\int 3\cosh x+2\operatorname{senh} xdx\qquad$ o) $\displaystyle\int\cosh x\cosh(\operatorname{senh} x)dx$

p) $\displaystyle\int\frac{1}{x-1}dx\qquad$ $*$ q) $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}dx\qquad$ $*$ r) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}dx\qquad$ s) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\qquad$ $*$ t) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

6.12. Calcula las siguientes primitivas usando la Regla de Integración por Partes.

1) $\displaystyle\int xe^xdx\qquad$ 2) $\displaystyle\int(x+1)\operatorname{sen} xdx\qquad$ 3) $\displaystyle\int(3x+1)\cos xdx\qquad$ 4) $\displaystyle\int-\frac{x}{e^x}dx$

5) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx\qquad$ 6) $\int e^x\operatorname{sen} xdx\qquad$ 7) $\int\arctan xdx\qquad$ 8) $\int\operatorname{arc\,sen} xdx.$

$*$ **6.13.** Demuestra las siguientes fórmulas de reducción:

1) $\displaystyle\int\operatorname{sen}^n xdx=-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\operatorname{sen}^{n-2}xdx$, $n>2$ y par.

2) $\displaystyle\int\cos^n xdx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx$, $n>2$ y par.

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$

6.14. Comprueba las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}=\ln|\tan\frac{x}{2}|\qquad$ b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$

6.15. Obtén, mediante un cambio de variable, una primitiva en los casos siguientes:
1) $\int 3x\sqrt[7]{5-x^2}dx$ 2) $\int \frac{x}{2}e^{-x^2}dx$ 3) $\int \frac{7dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 4) $\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}dx$
5) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx$ 6) $\int \frac{\arccos\frac{x}{3}}{\sqrt{9-x^2}}dx$ 7) $\int \frac{\sqrt[4]{7+\ln x}}{x}dx$
8) $\int \tan(\sqrt{x-1})\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. 9) $\int x^3\cosh(x^4+3)dx$.

6.16. Calcula las siguientes primitivas con el cambio de variable que se indica.
a) $\int \frac{dx}{x(1-x)}$; ($x=\operatorname{sen}^2 t$, y usa 6.14.). b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$; ($x=\sqrt{2}\cosh u$).
c) $\int \frac{dx}{e^x+1}$; ($x=-\ln t$). d) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$; ($t=\sqrt{x+1}$).
e) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$; ($x=\tan t$, y usa 6.14.). f) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$; ($x=a\operatorname{senh} t$, usa 4.6.).
g) $\int \sqrt{x^2+1}dx$; ($x=\operatorname{senh} t$,).

6.17. Calcula las siguientes primitivas utilizando las identidades trigonométricas "adecuadas."
a) $\int \cos^2 xdx$. b) $\int \operatorname{sen}^5 x\cos^6 xdx$. c) $\int \operatorname{sen}^2 xdx$.
d) $\int \tan^2 xdx$. e) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}dx$. f) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

$*$ **6.18.** Calcula las primitivas siguientes.
1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. 2) $\int \frac{dx}{x^2+2x}$. 3) $\int \frac{x}{x^2-7x+13}dx$.
4) $\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}dx$. 5) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+4}dx$.

6.19. Calcula las primitivas de las funciones racionales siguientes.
1) $\int \frac{x^3+x-1}{4x^3-x}dx$. 2) $\int \frac{x^3+x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$. 3) $\int \frac{x^4+3}{x^4-1}dx$. $*$ 4) $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$,(usa 6.13.).

$*$ **6.20.** a) Calcula $\int \operatorname{arcsen} xdx$.
b) Análogamente, prueba que si $F=\int f$, entonces

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)).$$

c) Usa lo anterior para calcular $\int \sqrt{x^2-1}dx$.

6.21. Calcula una primitiva en los siguientes casos:
1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x}}$. 2) $\int \frac{dx}{1-e^x}$. 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.
5) $\int \frac{dx}{2+\tan x}$. 6) $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^3 xdx$. 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$. 8) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$.
9) $\int \frac{x^3-1}{x^3+x}dx$. 10) $\int \operatorname{arcsen}\sqrt{x}dx$. 11) $\int (\frac{1}{x}\int_1^x \ln tdt)dx$.