AM

HOJA 7:

PROBLEMA 1º

a) $\mathbb{Z}^+=\{n\in\mathbb{Z};\ n\geq 0\}$ no es un anillo ya que

$(\mathbb{Z}^+\ +)=(\mathbb{N}\ +)$ no es un grupo

b) $7\mathbb{Z}$ vimos en teoría que este era un anillo conmutativo, íntegro sin unidad

$1\notin 7\mathbb{Z}$

Además char $7\mathbb{Z}=7$ ya que $\underbrace{[1]+\dots+[1]}_{7\text{-veces}}=[\underbrace{1+\dots+1}_{7\text{-veces}}]=[7]=[0]$

c) $\{0,1,-1,i,-i\}=R$ no es un anillo. Veámoslo.

$(R^*\ \times)$ es un grupo

pero $(R\ +)$ no es un grupo ya que

$1+i\notin R$; la suma no está definida como operación interna (e.d. sin salirnos de R)

d) $(M_{2\times3}(\mathbb{R})\ +)$ es un grupo conmutativo (álgebra lineal)

pero el producto de matrices 2×3 no está definido (no es un anillo)

f) $M_{2\times2}(\mathbb{Z}_3)$ con la suma es un grupo (álgebra lineal ya que $\mathbb{Z}_3$ es un cuerpo)

el producto está definido; es asociativo (álgebra lineal)

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ elemento neutro del producto.

Luego $M_{2\times2}(\mathbb{Z}_3)$ es un anillo con unidad.

(ni es conmutativo y no es íntegro)

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq 0 \quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$..

No es difícil ver que char $M_{2\times2}(\mathbb{Z}_3)=3=$ char $\mathbb{Z}_3$

(como en el caso de $\mathbb{Z}_3[x]$).

AM

HOJA 7:

PROBLEMA 1:

f) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times 2\mathbb{Z} \quad + \quad \times) : R$

CON $(a, b, c) + (a', b', c') = (a+a', b+b', c+c')$

Y $(a, b, c) \times (a', b', c') = (aa', bb', cc')$.

ES UN ANILLO CONMUTATIVO INTEGRO SIN ÚNIDAD

YA QUE $\mathbb{Z}$ ES UN DOMINIO DE INTEGRIDAD

$\mathbb{Z}_3$ ES UN CUERPO

Y $2\mathbb{Z}$ ES UN ANILLO CONMUTATIVO INTEGRO, SIN UNIDAD.

COMO $\text{Char } \mathbb{Z} = 0 \Rightarrow \text{Char } R = 0$

g) $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \; + \; \times) \; \mathbb{R}$

*) CON $(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a+a') + (b+b')\sqrt{2}$

- ES UNA SUMA BIEN DEFINIDA Y
- $0 + 0\sqrt{2}$ E. NEUTRO
- $(-a + -b\sqrt{2})$ OPUESTO DE $a + b\sqrt{2}$

LUEGO $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \; +)$ ES UN GRUPO CONMUTATIVO

**) CON $(a + b\sqrt{2}) \times (a' + b'\sqrt{2}) = aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in R$.

- ES ASOCIATIVO
- $1 + 0\sqrt{2}$ E. NEUTRO (R TIENE UNIDAD)
- ES INTEGRO YA QUE SI $ax + 2by = 0$

$$bx + ay = 0$$

COMO $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b^2 \neq 0$

(EN OTRO CASO $a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}b \in \mathbb{Z}$!!)

LUEGO LA ÚNICA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ES $x = y = 0$.

$\text{Char } \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = 0$ YA QUE $\text{Char } \mathbb{Z} = 0$ $(\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$

h) $R = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]$.

EN R NO ESTA DEFINIDO EL PRODUCTO (LA SUMA SI Y $(R+)$ ES UN GRUPO) YA QUE $x^2 \times x^2 = x^4 \notin R$..

AM

HOJA 7:

PROBLEMA 4: $(M_2(\mathbb{R}) + \times)$ ES UN ANILLO CON UNIDAD NO CONMUTATIVO Y NO INTEGRO (SE VE COMO EN EL CASO $M_{2\times2}(\mathbb{Z}_3)$, EJERCICIO 1)

SEA $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ Y $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ 0 & c-c' \end{pmatrix} \in B$$

ADEMÁS $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in B$.

LUEGO SEGÚN LO VISTO EN EL EJERCICIO 2 B ES UN SUBANILLO

SEA $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ Y $\begin{pmatrix} a & b'' \\ 0 & c \end{pmatrix} \in B$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \\ Y \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b'' \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b'c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \\ Y \begin{pmatrix} a & b'' \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \end{array}\right\}$$

LUEGO POR EL EJERCICIO 2 I ES UN IDEAL DE B

OBVIAMENTE I ES UN SUBANILLO DE $M_2(\mathbb{R})$. PERO NO UN IDEAL YA QUE PARA $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ Y $b \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin I.$$

PROBLEMA 5: SEA $a \in B$, B ANILLO, CON $a \neq 0$ Y CON $a^n = 0$ PARA ALGÚN $n \geq 1$. SEA $\min\{n : a^n = 0\} = n_0 > 1$ ASÍ $a^{n_0} = a\,a^{n_0-1} = 0$ CON $a \neq 0$ Y $a^{n_0-1} \neq 0$ POR LA DEFINICIÓN DE n_0; LUEGO a ES UN DIVISOR DE CERO

a) SI $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$, $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbb{Z}_{12} = \{[0], [1], \quad , [11]\}$ $[1], [5], [7], [11]$ TIENEN INVERSO, YA QUE NO TIENEN DIVISORES COMUNES CON 12, Y NO SON DIVISORES DE CERO; LAS POTENCIAS DE 2, 4 Y 8 NO SON NUNCA MÚLTIPLOS DE 12, LUEGO NO SON NILPOTENTES; LO MISMO OCURRE CON 3, 9 Y 10. SIN EMBARGO $6^2 = 36 \equiv 0 \mod 12$

AM

HOJA 7:

PROBLEMA 6:

SEAN $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ Y $\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \in B$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ -(b-b') & a-a' \end{pmatrix} \in B$$

ADEMÁS $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -ba'-ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix} \in B$

LUEGO POR EL EJERCICIO 2 B ES UN SUBANILLO DE $M_2(\mathbb{R})$

SEA $f \quad B \longrightarrow \mathbb{C}$

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longrightarrow f(m) = a+bi$$

f ESTÁ BIEN DEFINIDA; CLARAMENTE ES INYECTIVA Y SOBREYECTIVA; POR TANTO UNA BIYECCIÓN.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}\right) = (a+a') + (b+b')i$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}\right) = (a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (b+b')i$$

ADEMÁS

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VER ARRIBA}}}{=} (aa'-bb') + (ab'+ba')i = (a+bi)(a'+b'i) =$$

$$= f\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}.$$

LUEGO f ES UN ISOMORFISMO DE ANILLOS.

COMO $\mathbb{C}$ ES UN CUERPO, LAS PROPIEDADES ADICIONALES QUE HACE A $\mathbb{C}$ CUERPO, PASAN DE $\mathbb{C}$ A B A TRAVÉS DE f^{-1}; LUEGO B TAMBIÉN ES UN CUERPO.

HOJA 7º

PROBLEMA 7º) b) DIVIDIR x^{10} POR x^2+1 EN $\mathbb{Z}_2[x]$.

$$\begin{array}{l|l} x^{10} & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^{10}-x^8} & x^8+x^6+x^4+x^2+1 \\ \quad x^8 & \\ \quad\quad x^6 & \\ \quad\quad\quad x^4 & \\ \quad\quad\quad\quad x^2 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad \underline{1} & \end{array}$$

LUEGO $x^{10} = (x^8+x^6+x^4+x^2+1)(x^2+1)+1$

c) DIVIDIR $x^4+3x^3+2x^2+x+4$ ENTRE x^2+2x EN $\mathbb{Z}[x]$

$$\begin{array}{l|l} x^4+3x^3+2x^2+x+4 & x^2+2x \\ \cline{2-2} \underline{-x^2-2x^3} & x^2+x \\ \quad x^3+2x^2+x+4 & \\ \quad \underline{-x^3-2x^2} & \\ \quad\quad x+4 & \end{array}$$

ASÍ $x^4+3x^3+2x^2+x+4 = (x^2+x)(x^2+2x)+x+4$

d) DIVIDIR $x^4+3x^3+2x^2+x+4$ ENTRE $3x^2+2x$ EN $\mathbb{Q}[x]$

$$\begin{array}{l|l} x^4+3x^3+2x^2+x+4 & 3x^2+2x \\ \cline{2-2} \underline{-\;x^4-\frac{2}{3}x^3} & \frac{1}{3}x^2+\frac{7}{9}x+\frac{4}{27} \\ \quad 7/3\,x^3+2x^2+x+4 & \\ \quad \underline{-7/3\,x^3-\frac{14}{9}x^2} & \\ \quad\quad 4/9\,x^2+x+4 & \\ \quad\quad \underline{-4/4\,x^2-\frac{8}{27}x} & \\ \quad\quad\quad \frac{14}{27}x+4 & \end{array}$$

ASÍ $x^4+3x^3+2x^2+x+4 = (1/3\,x^2+\frac{7}{9}x+\frac{4}{27})(3x^2+2x)+\frac{14}{27}x+4$

OBSERVACIÓN EN EL CASO c) $\mathbb{Z}$ NO ES CUERPO Y HEMOS PODIDO DIVIDIR

EN EL CASO d) QUE $\mathbb{Q}$ SEA CUERPO ES NECESARIO PARA PODER HACER LA DIVISIÓN

AM

HOJA 7:

PROBLEMA 9: b) $f(x) = x^2+1$ $\quad g(x) = x^3+2x+1 \in \mathbb{C}[x]$.

APLICANDO EL ALGORITMO DE EUCLIDES.

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x+1 & x^2+1 \\ \hline -x^3-x & x \\ \quad x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+1 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x-1 \\ \quad -x+1 & \\ \quad\ x+1 & \\ \quad\ \ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x+1 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{array}$$

r	q	α	β
x^3+2x+1		1	0
x^2+1		0	1
$x+1$	x	1	$-x$
2	$x-1$	$1-x$	$1-x+x^2$
0	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$		

ASI $m.c.d\,(x^3+2x+1,\ x^2+1) = 2 =$

$= (1-x)(x^3+2x+1) + (x^2+1)(x^2-x+1)$

c) $f(x) = x^3+x+1$, $g(x) = x+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$

OBSERVACIÓN $g(-1)=0$ y $f(-1) = -1-1+1 = -1 \neq 0$

$m.c.d(x^3+x+1, x+1) = 1$

LUEGO $x+1 \nmid x^3+x+1 \Rightarrow$ ~~~~ USAMOS EL

PARA HALLAR UNA IGUALDAD DE BEZOUT; USAMOS EL ALGORITMO DE EUCLIDES

$(\mathbb{Z}_3^*, \cdot)$	1	2
1	1	2
2	2	1

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+1 & x+1 \\ \hline -x^3-x^2 & x^2+2x+2 \\ \quad 2x^2+x+1 & \\ \quad -2x^2-2x & \\ \qquad 2x+1 & \\ \qquad -2x-2 & \\ \qquad\ 2 & \end{array}$$

r	q	α	β
x^3+x+1		1	0
$x+1$		0	1
2	x^2+2x+2	1	$-(x^2+2x+2)$ $= 2x^2+x+1$.

ASI $2 = (x^3+x+1) + (2x^2+x+1)(x+1)$

EN ESTE CASO COMO $x^3+x+1 = (x^2+2x+2)(x+1)+2$ NO ES NECESARIO USAR EL ALGORITMO DE EUCLIDES.

AM

HOJA 7:

PROBLEMA 11: a) SEA $g(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$

$$g'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

VAMOS A CALCULAR $mcd(g, g')$ USANDO EL ALGORITMO DE EUCLIDES // ASI $mcd(g,g') = 1$ NO HAY RAICES MULTIPLES

(POR SIMPLICIDAD USAREMOS QUE $mcd(g,g') =$
$= mcd(4g, g')$)

ASI

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 8 & 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-4x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x & x - \frac{1}{4} \\ \hline
-x^3 + 2x^2 + 3x - 8 & \\
x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & \\ \hline
\frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{31}{4} &
\end{array}$$

COMO $mcd(g, g') = mcd(4g, g') = mcd\left(5g', 4\left(\frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{31}{4}\right)\right) =$

$$= mcd(20x^3 - 15x^2 + 10x + 5, 5x^2 + 14x - 31)$$

$$\begin{array}{l|l}
20x^3 - 15x^2 + 10x + 5 & 5x^2 + 14x - 31 \\ \cline{2-2}
-20x^3 - 56x^2 \quad 124x & 4x - \frac{71}{5} \\ \hline
-71x^2 + 134x + 5 & \\
71x^2 \quad \frac{994}{5}x - \frac{2201}{5} & \\ \hline
\frac{1664}{5}x - \frac{2176}{5} &
\end{array}$$

$$mcd\left(5x^2 + 14x - 31, \frac{1664}{5}x - \frac{2176}{5}\right) =$$

$$= mcd(5x^2 + 14x - 31, 1664x - 2176)$$

$$\begin{array}{l|l}
5x^2 + 14x - 31 & 1664x - 2176 \\ \cline{2-2}
\frac{10880}{1664}x & \frac{5}{1664}x + \frac{34176}{(1664)^2} \\ \hline
\frac{34176}{1664}x - 31 & \\
+\frac{2176 \times 34176}{(1664)^2} & \\ \hline
r &
\end{array}$$

COMO $r = -31 + \frac{2176 \times 34176}{(1664)^2} \underset{(1/4)}{=} -31 + \frac{544 \times 8544}{(416)^2} \underset{1/4}{=}$

$$-31 + \frac{136 \times 2136}{(104)^2} = -31 + \frac{34 \times 534}{(26)^2} \overset{=}{(1/2)}$$

$$-31 + \frac{17 \times 267}{(13)^2} = \frac{-31 \times (13)^2 + 17 \times (3 \times 89)}{(13)^2} \neq 0$$

$$\begin{array}{r}
\times 71 \\
14 \\ \hline
284 \\
71 \\ \hline
994
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\times 71 \\
31 \\ \hline
71 \\
213 \\ \hline
2201
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\times 134 \\
5 \\ \hline
670
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
1664 \\
14 \\ \hline
6656 \\
1664 \\ \hline
23296 \\
10880 \\ \hline
34176
\end{array}$$

HOJA 7.

AM

PROBLEMA 11:) g) ¿f TIENE RAÍCES MÚLTIPLES?

$f(x) = x^5+5x^4+3x^3+2x+1$ EN $\mathbb{Z}_7[x]$.

SEA $f'(x) = 5x^4+20x^3+9x^2+2 =$

$= 5x^4+6x^3+2x^2+2$

HAY QUE CALCULAR $mcd(f, f')$, USAREMOS EL ALGORITMO DE EUCLIDES.

$(\mathbb{Z}_7^*, x)$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

$$\begin{array}{l|l} x^5+5x^4+3x^3+2x+1 & 5x^4+6x^3+2x^2+2 \\ \cline{2-2} -x^5-4x^4-6x^3-6x & 3x+3 \\ \hline \quad x^4+4x^3+3x+1 & \\ \quad -x^4-4x^3-6x^2-6 & \\ \hline \quad\quad x^2+3x+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 5x^4+6x^3+2x^2+2 & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -5x^4-x^3-3x^2 & 5x^2+5x-2 \\ \hline \quad 5x^3+6x^2+2 & \\ \quad -5x^3-x^2-3x & \\ \hline \quad\quad 5x^2+4x+2 & \\ \quad\quad 2x^2+6x+4 & \\ \hline \quad\quad 0\ \ 3x+6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+3x+2 & 3x+6 \\ \cline{2-2} -x^2-2x & 5x+5 \\ \hline \quad x+2 & \\ \quad -x-2 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

OPERACIONES EN CONGRUENCIAS MÓDULO 7

ASÍ $mcd(f, f') =$

$= 3x+6$

CON GRADO MAYOR QUE 0, LUEGO f y f' TIENEN RAÍCES MÚLTIPLES; EN CONCRETO

$[x = -\dot{2} \equiv 5 \mod 7.]$

ES RAÍZ DOBLE DE f.

OBSERVEMOS QUE $x=-2$ ES RAÍZ DE $3x+6$.