

ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales II.

Se plantea el siguiente problema:

Dos estudiantes de físicas pasan el verano como cooperantes en Libano. Ven disparar un cañon y deciden calcular la trayectoria del proyectil. Preguntando a soldados de la O.N.U. conocen que el disparo se efectuó con un ángulo de 30 grados y que ese tipo de cañon proporciona una velocidad inicial de $300m/s$ a un proyectil de $50kg$. Los estudiantes no se ponen de acuerdo en si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del móvil o si esta resistencia es despreciable. Para saber quién de los dos tiene razón volvieron a preguntar a los cascos azules que les dijeron que el disparo que ellos vieron alcanzó $2,550m$ en $25sg$ ¿Cuál de los dos estudiantes tenía razón? (Toma la aceleración de la gravedad $g = 10m/s^2$).

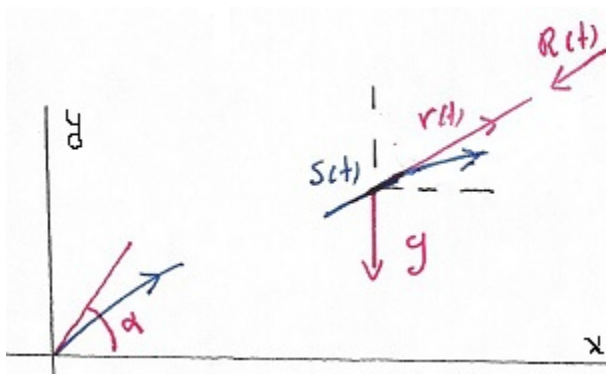


FIGURA 1. Trayectorias parabólicas.

Según el dibujo, tenemos que

- $s(t) = (x(t), y(t))$ es la trayectoria.
- $v(t) = (x'(t), y'(t))$ es la velocidad.
- $R(t) = Kv(t)$ o $R(t) = 0$ es la resistencia del aire.
- g es la gravedad (constante).

Por lo que sabemos de las curvas paramétricas tenemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$.

Primer Modelo sin Resistencia

Aplicando la segunda ley de Newton $ms''(t) = -(0, mg)$, es decir

$$\begin{cases} mx''(t) = 0 \\ my''(t) = -mg \\ x(0) = 0 & y & x'(0) = 300 \cos \alpha \\ y(0) = 0 & e & y'(0) = 300 \sin \alpha \end{cases}$$

Solución. Este modelo es fácil de integrar

- $x(t) = (300 \cos \alpha)t$
- $y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (300 \sin \alpha)t$

Observemos que $t = \frac{x}{300 \cos \alpha}$ y así

$$y(x) = -g \frac{\left(\frac{x}{300 \cos \alpha}\right)^2}{2} + (300 \sin \alpha) \frac{x}{300 \cos \alpha} = \frac{-g}{2(300 \cos \alpha)^2} x^2 + (\tan \alpha)x$$

que es la **ecuación de una parábola**.

Segundo Modelo con Resistencia

Aplicando la segunda ley de Newton $ms''(t) = -(0, mg) - Kv(t)$, es decir

$$\begin{cases} mx''(t) = -Kx'(t) \\ my''(t) = -Ky'(t) - mg \\ x(0) = 0 & y & x'(0) = 300 \cos \alpha \\ y(0) = 0 & e & y'(0) = 300 \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K/m & 0 \\ 0 & -K/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} x(0) = 0 & y & x'(0) = 300 \cos \alpha \\ y(0) = 0 & e & y'(0) = 300 \sin \alpha \end{array}$$

Esto es un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes. Más adelante veremos como se resuelven de forma general.

Solución. En este caso como cada una de las dos ecuaciones solo depende de una variable, podemos integrar con las técnicas que tenemos.

Así

$$\text{A: } \frac{x''(t)}{x'(t)} = -K/m \quad \text{y} \quad x'(0) = 300 \cos \alpha, \text{ luego}$$

$$x'(t) = (300 \cos \alpha)e^{-Kt/m};$$

e integrando (con $x(0) = 0$) tenemos que

$$x(t) = m/K \cos \alpha - (m/K \cos \alpha)e^{-Kt/m} = m/K \cos \alpha(1 - e^{-Kt/m})$$

B: $y''(t) = -g - (K/m)y'(t)$ y $x'(0) = 300 \sin \alpha$, luego (teniendo en cuenta la práctica 4) como $y'(t) = -mg/K$ es una solución estacionaria, entonces

$$y'(t) = -mg/K + (300 \sin \alpha + mg/K)e^{-Kt/m}.$$

Integrando (con $y(0) = 0$) tenemos que

$$y(t) = m/K(300 \sin \alpha + mg/K)(1 - e^{-Kt/m}) - mgt/K.$$

¿Cuál de los dos modelos es el correcto?

Comprobación de Modelo. (Los datos que usamos son inventados. Lo que aquí se deduce solo puede usarse a título de ejemplo)

Para $t = 25$, debería ocurrir que $x(25) = 2550m$ y que $y(25) = 0$ (esto último suponiendo que el terreno es plano).

Como $\cos 30 = \sqrt{3}/2$, $\sin 30 = 1/2$ y, $g = 10$, en el primer caso

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (300 \sin \alpha)t$$

y así

$$y(25) = -10 \frac{625}{2} + \frac{300}{2}25 = -3125 + 3750 = 625 \neq 0.$$

Parece que el primer modelo no se agusta a los datos experimentales.

Si en el segundo modelo ($m = 50$) imponemos que $x(25) = 2550m$ y $y(25) = 0$, entonces haciendo cuentas vemos que para $K \simeq 5,03$ y así los datos experimentales se ajustan al modelo.

Habría que hacer mas experimentos (en este caso disparos) para comprobar que la constante de proporcionalidad de la resistencia del aire es efectivamente $K \simeq 5,03$, para asegurar que el modelo segundo es el correcto.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`