

ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales III.

Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra

Pensamos en un rebaño de vacas que pastan en un pasto y de los lobos que las tienen de cena.

Consideramos:

- $x(t)$ es la población de **presas**.
- $y(t)$ es la población de **depredadores**.
- $x'(t)$ es la velocidad de crecimiento de las presas que suponemos proporcional a la población ($ax(t)$) y también proporcional al encuentro entre presas y depredadores $-bx(t)y(t)$; así

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

- $y'(t)$ es la velocidad de crecimiento de los depredadores que suponemos proporcional a la población ($-cy(t)$ (más depredadores menos comida a repartir) y también proporcional al encuentro entre presas y depredadores $dx(t)y(t)$; así

$$y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t).$$

Tenemos el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden **no** lineales

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}.$$

Soluciones:

- $x = 0$ e $y = 0$ (es una solución estacionaria y un punto de equilibrio)
- $x = 0$ e $y(t) = y_0 e^{-ct}$ (y_0 población inicial, por falta de presa y tiende a la extinción)
- $y = 0$ e $x(t) = x_0 e^{at}$ (x_0 población inicial, por falta de depredadores x no para de crecer).
- $x = c/d$ e $y = a/b$ (solución de equilibrio).

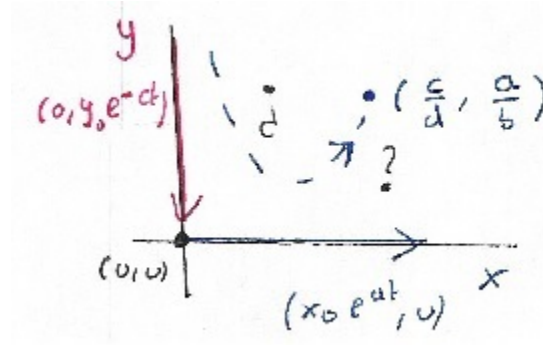


FIGURA 1. Soluciones triviales del modelo depredador-presa.

Observación 1. En cursos superiores se verá con detalle que la región (primer cuadrante)

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \}$$

es una región invariante para el sistema de ecuaciones. Es decir, si una solución $(x(t), y(t))$ del sistema pasa por un punto $(x_0, y_0) \in A$, entonces $((x(t), y(t)) \in A$ para todo t .

¿Como son estas soluciones? Si las vemos como gráfica, es decir como funciones y de variable x , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y[-c + dx]}{x[a - by]}.$$

Despejando

$$\frac{y'}{y}[a - by] = \frac{-c + dx}{x}.$$

Integrando en x , tenemos que

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + K.$$

Lo que nos da la familia de curvas, en ecuaciones implícitas,

$$\ln y^a x^c - by + dx = K \quad \text{donde} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Mejora del Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra

Un reparo a las ecuaciones de Lotka-Volterra es suponer ilimitado el crecimiento de las presas en ausencia de depredadores. Por ello, como hicimos en el caso de la ecuación logística, incluimos términos logísticos tanto en el crecimiento de las presas como en el de los depredadores (este último extremo puede ser un punto discutible). Así tendremos las nuevas ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x' &= x(a - \lambda x - by) \\ y' &= y(-c + dx - \mu y) \end{aligned} \right\} \quad \lambda > 0, \mu \geq 0.$$

Estamos de nuevo ante un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineal.

Es fácil entender que $(0, 0)$ y la solución (x_0, y_0) del sistema

$$0 = a - \lambda x - by$$

$$0 = -c + dx - \mu y$$

son dos soluciones estacionarias del sistema. En cursos superiores se podrá ver con detalle el comportamiento cualitativo de las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales. Para ello necesitaremos aproximar la función de dos variable con valores en $\mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = (x(a - \lambda x - by), y(-c + dx - \mu y))$$

por su diferencial $DF(x_0, y_0)$.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`