ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La Braquistocrona. Cálculo Variacional.

En 1696 Johann Bernoulli (1667-1748) propone el siguiente problema como desafio a los matemáticos de Europa.

Dados dos puntos del plano A y B (como los de la figura) que no están en una misma recta vertical u horizontal, se consideran las curvas que unen estos dos puntos. Hay que hallar entre ellas aquella que al dejar caer por ella un "bola" empujada solamente por al fuerza de gravedad (sin rozamiento) el tiempo de caída es mínimo.

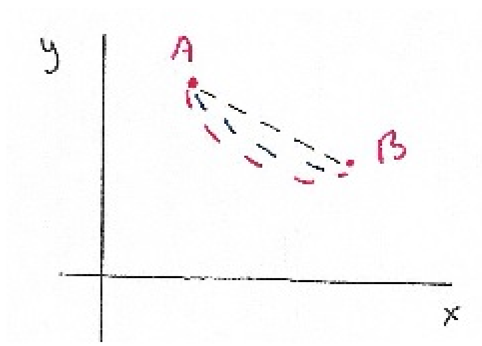

FIGURA 1. Curvas que unen A y B.

El problema fué resuelto por el propio Bernoulli, por su hermano mayor Jakob (1654-1705), por Leibniz (1648-1716), L'Hôpital (1661-1704) y Newton (1642-1727).

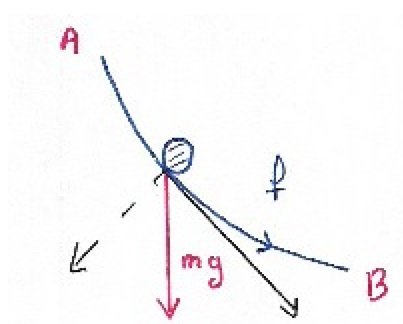

FIGURA 2. Mecánica del problema.

Los nombres anteriores ilustran la importancia del problema, aparte de que:

- se resuelve un problema físico;
- nace una nueva Teoría en las Matemáticas, **El Cálculo Variacional**.

Antes de resolver el problema anterior, vamos a ver en que consiste esta teoría del Calculo Variacional.

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se puede intentar calcular sus máximos y mínimos (**Problema de Optimización**).

Vamos a considerar ahora un operador (aplicación) $T : F \to \mathbb{R}$ sobre un espacio de funciones (pensemos en las curvas o gráficas que unen los puntos A y B). Se puede tratar de buscar los mínimos de la aplicación T (problema de Cálculo Variacional).

Ejemplo Hablando sin mucha precisión:

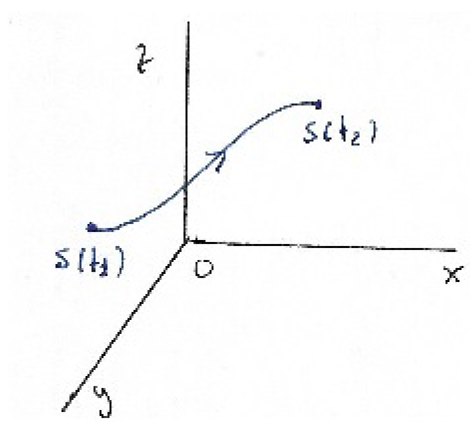

FIGURA 3. Sistema físico.

en la Física la **Lagrangiana** $L = T - V$ (donde Tes la energía cinética y V la energía potencial) regula un sistema físico s (que lo podemos ver como el movimiento de una particula a lo largo de una trayectoria sin que sepamos el motivo del movimiento), que pasa del estado $s(t_1)$ al estado $s(t_2)$ en el espacio de tiempo comprendido entre t_1 y t_2. **El Principio de Hamilton** dice que: el movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 es tal que la integral de línea

$$I(s) = \int_s L ds = \int_{t_1}^{t_2} L(s(t))s'(t)dt$$

es un extremal (un mínimo) respecto de las trayectorias del movimiento (s debe minimizar I; problema variacional).

Los problemas variacionales pasan por resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (E.D.P. de Euler-Lagrange) algo que está fuera de este curso. Si podemos resolver el problema de arriba llamado el **Problema de la Braquistocrona**. Una anécdota de este problema es que hubo "pelea" entre los insignes matemáticos europeos sobre quién lo resolvió primero. En particular, entre los propios hermanos Bernoulli.

Relación entre la Braquistocrona y otro problema nacido de la óptica.

En la siguiente figura vemos un rayo de luz que se propaga de A a B con velocidad v_1 hasta P y con velocidad v_2 desde P (cambia la velocidad al pasar a un medio más denso y así $v_1 > v_2$).

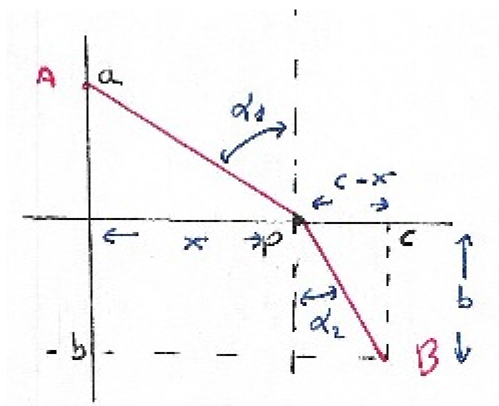

Figura 4. Refracción de la Luz.

El tiempo total T de propagación de A hasta B (como *espacio* $=$ *tiempo* $\times$ *velocidad*) será

$$T = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

(donde hamos usado que $A=(0,a)$ y $B=(c,-b)$). Si asumimos que el rayo se propaga de A a B por el camino que minimiza T, entonces P es el punto donde

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

Así derivando T y despejando

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

o equivalentemente (ver dibujo)

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2},$$

Fórmula de Refracción de Snell (1591-1626) descubierta experimentalmente por Snell en la forma

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = cte.$$

La luz encuentra P para llegar cuanto antes de A a B. La suposición de que la luz escoge el camino para llegar antes se conoce como **Principio de Fermat** o **Principio del Menor Tiempo**. La importancia de está prueba (además de dar base teórica a la fórmula experimental de Snell) es que se puede aplicar a encontrar el camino que toma un rayo de luz en un medio de densidad variable, donde generalmente la luz no viaja a lo largo de segmentos rectilíneos:

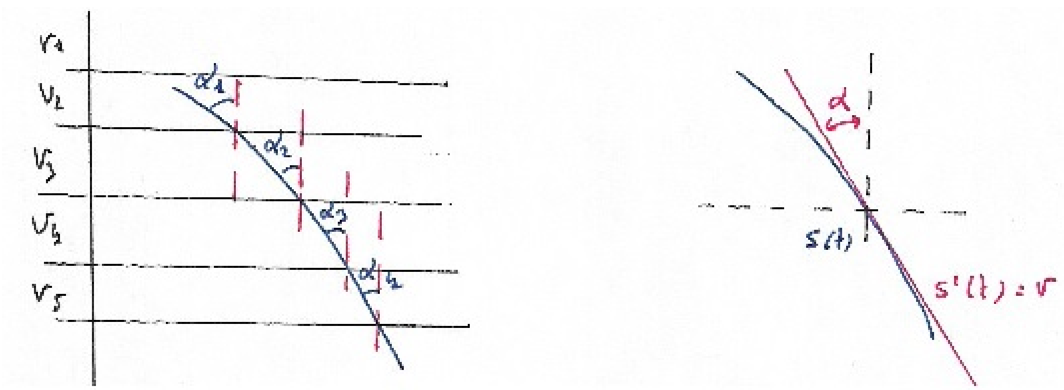

FIGURA 5. Refracción de la Luz en un sistema continuo.

En este caso si $(t, s(t))$ es la tayectoria de la luz, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = cte$$

donde $v = \sqrt{1 + (s')^2(t)}$ y α se toma respecto de la recta tangente a al trayectoria

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = s'(t).$$

Una solución al problema de la Braquistocrona.

Ponemos un sistema de coordenadas como muestra la figura.

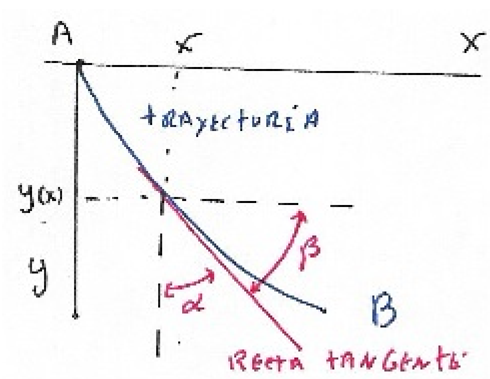

FIGURA 6. Braquistocrona.

Imaginemos la partícula (que como la luz) es capaz de elegir el camino de descenso de A a B para reducir el tiempo de caída. Entonces el razonamiento visto para el rayo de luz sería correcto y se verifica que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = cte = a.$$

Ahora, el Principio de la Conservación de la Energía implica que la velocidad que gana la particula en cada nivel depende solo de la pérdida de la energía potenciaal de la particula y no del camino que lleve (suponiendo que no hay rozamiento). Lo cuál implica que

$$v = \sqrt{2gy}$$

donde g es la gravedad que suponemos constante. La energía cinética es $E_c = \frac{mv^2}{2}$ y la potencial $E_p = gmy$; el principio de conservación dice que $E_c - E_p = 0$, así despejando v tenemos la igualdad de arriba.

Por otro lado el gráfico de arriba nos dice que

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

donde estamos tomando y en función de x, y así y' es la pendiente de la recta tangente a al gráfica de y, es decir $y' = \pm\tan\beta$.

Combinando ambas ecuaciones, tenemos que

$$a = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}}{\sqrt{2gy}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{2gy(1+(y')^2)}} = a$$

y por tanto

$$y(1+(y')^2) = K \qquad K \in \mathbb{R}$$

es una ecuación diferencial de primer orden cuyas soluciones nos dan la **Braquistocrona**.

Solución: Operando

$$(y')^2 = \frac{K}{y} - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' = \sqrt{\frac{K}{y} - 1}.$$

Considerando la función inversa (de y) y su derivada (Teorema de la Función Inversa) tenemos que

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{K-y}}.$$

Integrando respecto de y

$$x(y) = \int x'(y)dy = \int \sqrt{\frac{y}{K-y}}dy =$$

el cambio de variable $y = K\operatorname{sen}^2 t$ y así $dy = 2K\operatorname{sen}t\cos t dt$ nos lleva a

$$\int \sqrt{\frac{K \operatorname{sen}^2 t}{K(1-\operatorname{sen}^2 t)}}\, 2K \operatorname{sen} t \cos t dt = 2K \int \operatorname{sen}^2 t dt =$$

$$2K \int 1 - \cos^2 t dt = 2K \int 1 - [\frac{1+\cos 2t}{2}] dt = 2K(\frac{1}{2}t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}).$$

De lo que se sigue las ecuaciones paramétricas de la solución:

$$\left.\begin{array}{rcccl} x(t) & = & 2K(\frac{1}{2}t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}) & = & \frac{K}{2}(2t - \operatorname{sen} 2t) \\ y(t) & = & K \operatorname{sen}^2 t & = & \frac{K}{2}(1-\cos 2t) \end{array}\right\}$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de una **Cicloide** (de una familia de cicloides, para cada K tenemos una) $\square$

La cicloide es una curva muy conocida desde muy antiguo con propiedades muy particualres que merece ser estudiada aparte.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`