ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Los ejemplos que hemos visto hasta ahora son de ecuaciones diferenciales en las cuáles la función incógnita tenía una única variable. Ecuaciones del tipo

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

A este tipo de ecuaciones se les llama **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** (E.D.O.). Se las llama así para distinguirlas de las ecuaciones diferenciales donde la función incógnita tiene más de una variable, en este caso se les llama **Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales** (E.D.P.). Vamos a ver unos ejemplos (importantes) de estas últimas, aunque su estudio queda fuera de este curso.

Ecuación del calor estacionaria o Ecuación de Laplace.

Sea $u : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, una función de tres variables donde $u(x, y, z)$ es la temperatura de un sólido en el punto (x, y, z) (mira el dibujo)

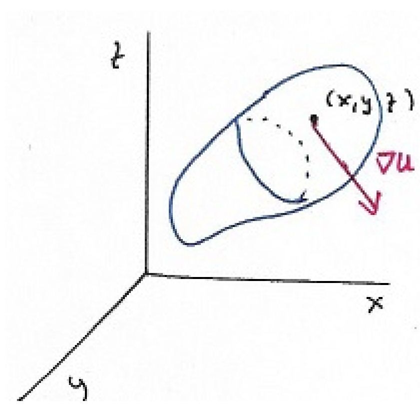

Figura 1. Distribución de Temperatura.

Supongamos que la temperatura no depende del tiempo (sistema estacionario)

$$-\nabla u = -(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}),$$

es el **gradiente** de u que indica la dirección de mayor variación de u en el punto (x, y, z) (mirar Cálculo Diferencial).

Si tomamos un "trozo" $D_0 \subset D$ (una bola por ejemplo), como el calor ni se acumula ni desaparece, por tanto se puede suponer que el flujo de calor a través de la frontera de D_0 (∂D_0) está en equilibrio, es decir

$$\int_{\partial D_0} (-\nabla u) n dS = 0.$$

La integral de superficie, anterior, de la componente normal del flujo $(-\nabla u)n$, debe ser nula ya que el calor que fluye en la dirección de máxima variación de la temperatura y sale de D_0 se compensa con él que entra.

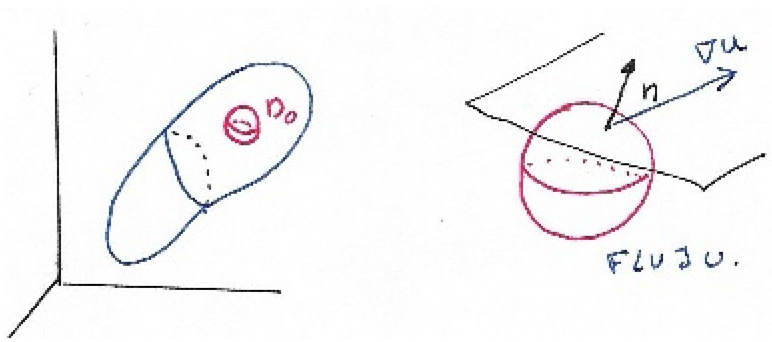

FIGURA 2. Flujo a través de una superficie.

Ahora por el Teorema de la Divergencia (ver Cálculo Integral)

$$0 = \int_{\partial D_0} (-\nabla u) n dS = \int\int\int_{D_0} div(\nabla u) dx dy dz =$$

si $u \in C^2(D)$

$$\int\int\int_{D_0} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} dx dy dz.$$

Como lo anterior es cierto todo para trozo de D_0 de D que elijamos, llegamos a que

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0$$

que es una E.D.P. llamada **Ecuación de Laplace**.

Ecuación del calor.

Sea $u : D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de cuatro variables donde $u(x, y, z, t)$ es la temperatura de un sólido en el punto (x, y, z) en el momento t. Con técnicas parecidas a las anteriores se llega a que u verifica la ecuación

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = k \frac{\partial u}{\partial t}$$

k constante, que es una E.D.P. llamada **Ecuación del Calor**.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es