ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Un método de integración de Ecuaciones Diferenciales.

A la vista de los dos ejemplos anteriores, si tenemos un **problema de Cauchy**:

$$\begin{cases} x'(t) & = & F(x(t)) \\ \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

(una ecuación diferencial junto a una condición inicial), donde F es una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con buenas propiedades, por ejemplo F continua; podemos resolver este problema de la siguiente manera.

Si para algún $x_0 \in \mathbb{R} \qquad F(x_0) = 0$ tenemos que la función constante $x = x_0$ es una solución, **solución estacionaria**.

Allí donde $F \neq 0$, podemos despejar en la ecuación

$$\frac{x'(t)}{F(x(t))} = 1$$

e integrando

$$\int \frac{x'(t)}{F(x(t))} = t + K \qquad K \in \mathbb{R} \qquad \text{es una constante.}$$

La fórmula de sustitución para $u = x(t)$ nos da

$$G = \int \frac{1}{F(u)}.$$

La tal G existe ya que F es continua (Teorema Fundamental del Cálculo). Luego

$$G(x(t)) = t + K.$$

Ahora como $G' = \frac{1}{F} \neq 0$, el Teorema de la Función Inversa nos dice que existe G^{-1} y despejando

$$x(t) = G^{-1}(t + K),$$

que es una familia de curvas; para cada $K \in \mathbb{R}$ tenemos una distinta. Si además $x(0) = x_0$, entonces

$$K = G(x_0)$$

y así la solución del problema de Cauchy que buscamos es única

$$x(t) = G^{-1}(t + G(x_0)) \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es