ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

EJEMPLOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Ejemplo 1. ***Vamos a construir un amortiguador (Oscilador amortiguado).***

Se toma un émbolo, fijo a una masa m, y se sumerge en un fluido, el cuál impedirá su desplazamiento con una **fuerza de rozamiento** (o amortiguadora) de $-b\frac{dx}{dt}$ (proporcional a la velocidad). Por el lado opuesto la masa está unida a un muelle que ejerce una **fuerza restauradora** proporcional a la elongación del muelle $-Kx$ (**ley de Hooke**). En este **sistema** (ver la figura (A) de abajo) intervienen tres fuerzas mecánicas,

- la fuerza de la gravedad (constante mg);
- la fuerza de recuperación del muelle ($-Kx$);
- la fuerza de rozamiento que opone el fluido ($-b\frac{dx}{dt}$).

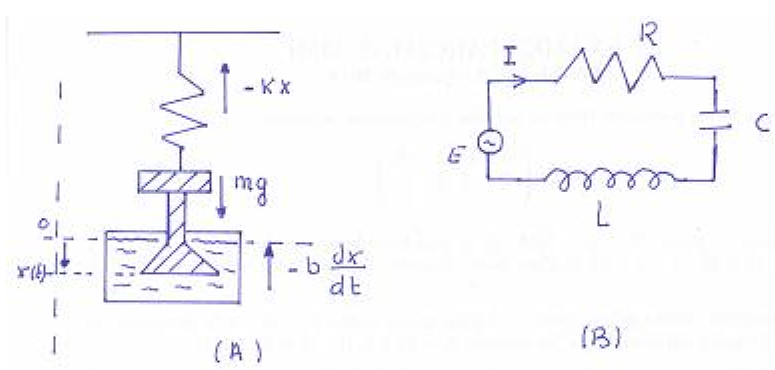

FIGURA 1. Sistemas Osciladores Amortiguados.

El mecanismo puede moverse longitudinalmente hacia abajo o hacia arriba. La función $x(t)$ mide el desplazamiento en función del tiempo. Las fuerzas que intervienen y su magnitud están fijadas experimentalmente. Por otro lado la **segunda ley de Newton** de la mecánica nos dice que la masa por la aceleración del movimiento es igual a la **resultante** de las fuerzas implicadas, es decir

$$mx''(t) = mg - Kx(t) - bx'(t)$$

o equivalentemente

$$x''(t) + \frac{b}{m}x'(t) + \frac{K}{m}x(t) = g$$

Esto es un ejemplo de ecuación diferencial ordinaria (la función incógnita x solo depende de una variable), de segundo orden (ya que nos aparece hasta la segunda derivada de la incógnita x); y que vamos a identificar más adelante como una ecuación lineal no homogénea.

Ejemplo 2. ***Vamos a considerar un circuito RLC (ver figura de arriba (B)).***

En un circuito **RLC**, con una resistencia **R**, una inductancia **L** y un condensador **C**, tenemos una corriente de entrada $E(t)$ que depende del tiempo y otra corriente que sale $S(t)$ que será una modificación de la corriente de entrada dependiendo de **R**, **L** y **C**.

Según la **ley de Kirchhoff**, una corriente en un circuito cerrado presenta una suma algebraica de las caídas de **voltaje** igual a cero. Esta ley se determina experimentalmente como las que se indican a continuación:

- $E(t)$ voltaje de entrada en el circuito.
- $V_R = -RI(t)$ la caída de voltaje en una resistencia depende de R y de la intensidad de la corriente $I(t)$ (**ley de Ohm**).
- $V_L = -L\frac{dI(t)}{dt}$ caída de voltaje en el selenoide.
- $V_C = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)ds$ caída de voltaje en el condensador.

Así por la ley de Kirchhoff se tiene que

$$E(t) - L\frac{dI(t)}{dt} - RI(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)ds = 0.$$

Tomando el voltaje por

- $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)ds$
- $v'(t) = \frac{1}{C}I(t)$ y
- $v''(t) = \frac{1}{C}\frac{dI(t)}{dt}$,

y ahora sustituyendo en la ecuación de arriba nos queda

$$E(t) = CLv''(t) + CRv'(t) + v(t).$$

Es decir, la salida del circuito $S(t) = v(t)$ verifica la ecuación diferencial anterior. Por otro lado, esta ecuación no es más que una E.D.O. lineal de segundo orden como la del ejemplo anterior del amortiguador.

Tenemos dos ejemplos de fenómenos físicos diferentes que se **modelan** matemáticamente con el mismo objeto matemático:

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = f(t)$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y f es una función conocida dependiente de una variable t. En este caso $x(t)$ es una función incógnita. Esta ecuación es una E.D.O. lineal de segundo orden no homogénea y de coeficientes constantes.

Observemos que la ecuación aproximada del péndulo (del ejemplo anterior)

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$$

es del tipo anterior para $a_1 = 0$, $f = 0$ y $a_2 = \frac{g}{l}$.

Más adelante estudiaremos en profundidad este tipo de ecuaciones.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es