

CÁLCULO

5. Aproximación de Funciones por Polinomios.

5.1. Calcula los polinomios de Taylor de grado 2 de las siguientes funciones centrados en los puntos que se indican.

- a) $f(x) = \cos x$, centrado en $a = \pi$. * b) $f(x) = \cosh x$, $a = 0$.
c) $f(x) = \ln(x^2)$, $a = 1$. d) $f(x) = e^x$, $a = 1$.
e) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $a = 0$. f) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $a = 0$.

5.2. Determina el origen de las siguientes expresiones.

- a) $\cos x \simeq \frac{(x-\pi)^2}{2} - 1$ si $x \simeq \pi$. * b) $\cosh x \simeq 1 + \frac{x^2}{2}$ si $|x| \simeq 0$.
c) $\ln(x^2) \simeq 2(x-1) - (x-1)^2$ si $x \simeq 1$. d) $e^x \simeq e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ si $x \simeq 1$.
e) $\frac{x}{1+x^2} \simeq x$ si $|x| \simeq 0$. f) $\frac{2x}{1+x} \simeq 2x - 2x^2$ si $|x| \simeq 0$.

5.3. Encuentra una estimación del error máximo que se puede cometer al tomar:

- 1) $\frac{(x-\pi)^2}{2} - 1$ en lugar de $\cos x$ si $x \in [3, 1, 3, 2]$.
* 2) $1 + \frac{x^2}{2}$ en lugar de $\cosh x$ si $x \in [-0, 2, 0, 2]$.
3) $2(x-1) - (x-1)^2$ en lugar de $\ln(x^2)$ si $x \in [0, 7, 1, 3]$.
4) $e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ en lugar de e^x si $x \in [0, 8, 1, 2]$.
5) $e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ en lugar de e^x si $x \in [0, 4, 1, 6]$.

5.4. Halla los polinomios de Taylor, del grado indicado y en el punto indicado, de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \cos x$, grado 3 en 0. b) $f(x) = \arctan x$, grado 3 en 0.
c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4 en 0. d) $f(x) = \lg x$, grado 4 en 2.

* **5.5.** Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad, se comba formando la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$. Demuestra que, para valores pequeños de $|x|$, la forma que toma el hilo puede ser representada por la parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

5.6. Calcula las series de Taylor de las funciones siguientes centradas en los puntos que se indican.

- a) $f(x) = e^x$, centrada en $a = 1$. b) $f(x) = (x-1)e^{x+1}$, $a = 1$.
* c) $f(x) = e^x(x-1)^5$, en $a = 1$. * d) $f(x) = \cos x$, $a = \frac{\pi}{4}$. e) $f(x) = \sin x$, $a = \pi$.
* f) $f(x) = \frac{\sin x}{(x-\pi)}$, en $a = \pi$. g) $f(x) = e^{-x^2}$, $a = 0$.
h) $f(x) = \ln(1+x^2)$, $a = 0$. * i) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $a = 0$.

5.7.a) Prueba la siguiente desigualdad:

$$|\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})| < \frac{1}{5040} \quad \text{para todo} \quad |x| \leq 1.$$

b) Encuentra n_0 tal que $|\cos x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k| < \frac{1}{10^{-4}}$ para todo $x \in [0, \pi/2]$.

5.8. Calcula los siguientes números con un error inferior a 10^{-3} ;

- 1) $\sin 1$. 2) e^{-1} . * 3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{10}$. 4) $\ln 2$.

* significa, problema propio del grupo.