ÁLGEBRA LINEAL

LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Los números reales $\mathbb{R}$ los construíamos, entre otras razones, para asegurar la existencia de raíces cuadradas de los números positivos. La ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

no tiene solución en el cuerpo de los números reales, ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x^2 \geq 0$. El **cuerpo de los números complejos**, que vamos a definir, se construye para que la ecuación anterior tenga solución. En general para poder definir la raíz cuadrada de cualquier número.

Ejemplo 1. *La ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ no tiene raíces en el cuerpo $\mathbb{R}$ (donde si pertenecen los coeficientes del polinomio).*

Si la ecuación tuviese solución, ésta sería

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1} \ \square$$

En $\mathbb{R}$ no existe ningún número que elevado al cuadrado de -1. Para que la ecuación anterior tenga solución tenemos que "inventar" tal número.

Definición 1. *Se llama **número imaginario** i al número con la propiedad de que $i^2 = -1$ (o eqivalentemente $i = \sqrt{-1}$).*

Podemos construir, también, números de la forma $a+bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, y operarlos (sumarlos y multiplicarlos) con las reglas "habituales" de los números, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

Ejemplo 2.
- $(2+3i) + (7+2i) = 2 + 7 + (3+2)i = 9 + 5i.$
- $(2+3i) \times (7+2i) = 2(7+2i) + 3i(7+2i) = 14 + 4i + 21i + 6i^2 = 14 - 6 + 25i = 8 + 25i$

(Así se empezó a trabajar en el siglo XVI con esta nueva clase de números, aunque no se entendía muy bien lo que eran).

Más formalmente, se puede definir el conjunto de los **números complejos** de la siguiente manera.

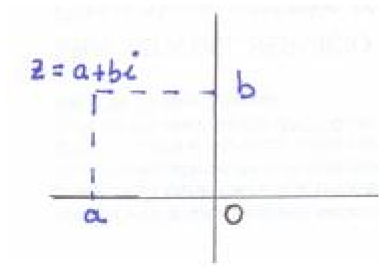

Figura 1. El plano complejo.

Definición 2. *Se llama conjunto de los números* ***complejos*** $\mathbb{C}$ *al conjunto*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\};$$

dotado de dos operaciones, una

- ***suma:*** *para todo* $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C};$$

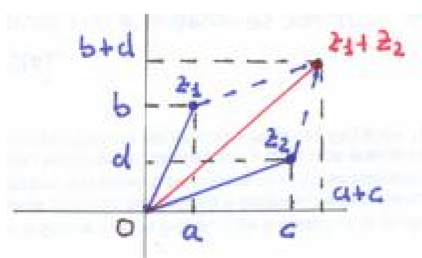

Figura 2. Suma de números complejos.

y un

- ***producto:*** *para todo* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}.$$

Además se puede definir un producto por escalares

- ***producto por escalares:*** *para todo* $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ *y para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda z = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

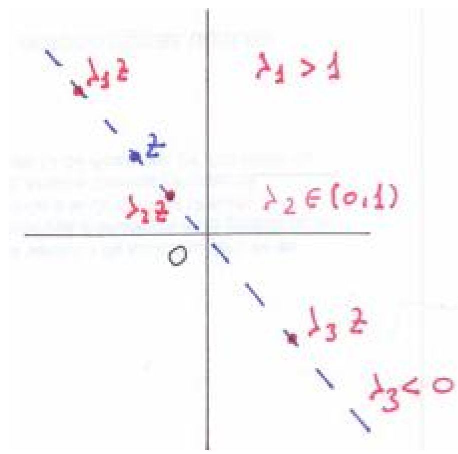

FIGURA 3. Producto por un escalar en $\mathbb{C}$.

Según la definición anterior podemos observar lo siguiente.

Observación 1.
- $(a, 0) \times (b, 0) = (ab, 0)$.
- $(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$. *Luego* $i = (0, 1)$.
- $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$

donde la última igualdad es una ***notación****, que es compatible con lo que hemos visto hasta ahora de números complejos.*

Notación: los números complejos se suelen notar con la letra z. Así escribiremos $z \in \mathbb{C}$ y queremos decir que existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $z = a + bi$.

Ejemplo 3. *Ahora, para el ejemplo de arriba* $x^2 + 2x + 2 = 0$, *estamos en condiciones de decir cuáles son sus raíces:* $x = -1 + i$ *y* $x = -1 - i$.

Esta primera aproximación a los números complejos, sin saber muy bien lo que son, nos permite resolver cualquier ecuación polinómica de segundo grado. Un estudio más profundo de los complejos permite descubrir aplicaciones fascinantes. Como por ejemplo:

- todo polinomio de coeficientes reales de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas; **Teorema Fundamental del Álgebra**).

- Los complejos permiten definir la **Transformada de Fourier** herramienta esencial en la **Teoría de la Señal**.
- El algoritmo de la **Transformada Rápida de Fourier** (quizás el algoritmo de mayor uso) no se entiende sin las raíces n-ésimas (complejas) de las unidad.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`