ÁLGEBRA LINEAL.

EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Los números complejos forman un **cuerpo.** Lo que quiere decir que podemos operar con ellos como lo hacemos con los números racionales o reales. Además veremos que todo número complejo admiten raíces de cualquier orden.

Teorema 1. $\mathbb{C}$ *con su suma y su producto es un* ***cuerpo*** *de modo que*

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Demostración:

- Si $a \in \mathbb{R}$, $(a, 0) = a + 0i \in \mathbb{C}$ y las operaciones de $\mathbb{R}$ son compatibles con las de los números complejos de la forma $(a, 0)$. Así vemos que $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

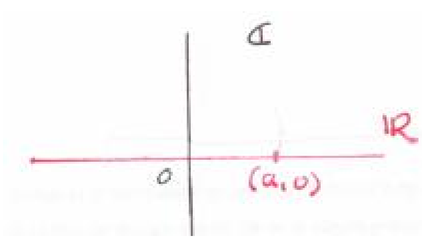

Figura 1. $\mathbb{R}$ dentro de $\mathbb{C}$.

- $z = 0 = (0, 0) = 0 + 0i$, claramente es el **elemento neutro** de la suma.
- Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, el número que escribimos por $-z$ y definimos por

$$-z = -a - bi$$

tiene la propiedad de que $z + (-z) = 0$, es decir es el **elemento opuesto** de z.

- $z = 1 = (1, 0) = 1 + 0i$, claramente es el **elemento neutro del producto**.
- Si $z = a+bi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces el número complejo que llamamos $z^{-1} = \frac{1}{z}$ y que definimos por
$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$
tiene la propiedad de que $z \times z^{-1} = 1$, es decir es el **elemento inverso** de z.

Probar que tanto la suma y como el producto de complejos son operaciones **asociativas**, **conmutativas** y que la segunda es **distributiva** con respecto de la otra se deja como ejercicio.

Por todo lo anterior $(\mathbb{C}, +, \times)$ es un **cuerpo.**

Por último vamos a ver de donde sale la fórmula para calcular el inverso de un número complejo.

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, buscamos $w = x + yi \in \mathbb{C}$ de modo que $zw = 1$, es decir que
$$\begin{array}{rcrcl} ax & - & by & = & 1 \\ bx & + & ay & = & 0, \end{array}$$
según hemos definido el producto de dos números complejos. Hemos llegado a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x e y). Como el determinante de los coeficientes
$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0,$$
el sistema tienen solución única. Según la regla de Cramer
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a^2+b^2} = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$
Que es la solución que dabamos al principio $\square$

Observación 1. *Veremos, más adelante, que $\mathbb{C}$ con la suma y el producto por escalares es un **espacio vectorial** sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ indistinguible del espacio vectorial de dimensión 2 $\mathbb{R}^2$.*

Observación 2. *En $\mathbb{C}$ no tenemos un orden (total) como en los números reales $\mathbb{R}$.*

Claro, si lo hubiese, para todo $z \in \mathbb{C}$, se tendría que $z^2 \geq 0$. Sin embargo tenemos que

$$i^2 = -1 < 0 \qquad \square$$

Definición 1. *Dado un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$,*

- *se llama* ***parte real*** *de z a $Rez = a$;*
- *se llama* ***parte imaginaria*** *de z a $Imz = b$;*
- *se llama* ***conjugado*** *de z al número complejo $\overline{z} = a - bi$.*

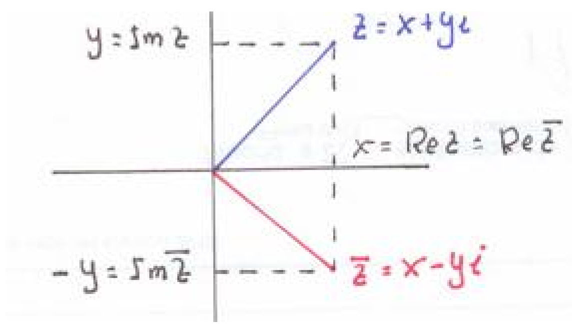

FIGURA 2. Conjugado de un complejo.

Observación 3.

- *Si $z = a + bi$, entonces $z\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.*
- *$(x - z)(x - \overline{z}) = (x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x]$. El recíproco lo veremos más adelante, es decir todo polinomio de segundo grado y coeficientes en $\mathbb{R}$ que no tiene raíces en $\mathbb{R}$ tiene por raíces dos complejos conjugados.*

La **conjugación** de complejos tiene además las siguientes propiedades.

Proposición 1. *Para todo $z, w \in \mathbb{C}$*

- *$z\overline{z} \in \mathbb{R}$, con $z\overline{z} \geq 0$; además si $z\overline{z} = 0$, entonces $z = 0$.*
- *$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ $\quad$ y si $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$.*
- *$z = \overline{z}$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$. Además $\overline{\overline{z}} = z$.*
- *$\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ $\qquad$ y $\qquad$ $\overline{\left(\dfrac{w}{z}\right)} = \dfrac{\overline{w}}{\overline{z}}$.*

Demostración: Todas ellas son muy sencillas de verificar. Si $z = a+bi$ y $w = c + di$, entonces

- $z\overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$. Si $z\overline{z} = a^2 + b^2 = 0$, se tiene que $a^2 = b^2 = 0$ y por tanto $z = 0$;
- $\overline{zw} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ $= (a - bi)(c - di) = \overline{z}\ \overline{w}$;
- $z = \overline{z}$ es equivalente a $b = -b$, luego $b = 0$;
- dado z, su inverso $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{z\overline{z}} - \dfrac{bi}{z\overline{z}}$, por tanto el conjugado del inverso es

$$\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{a}{z\overline{z}} + \frac{bi}{z\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}} \quad \square$$

Las propiedades anteriores se usan para manipular números complejos.

Ejemplo 1. *Si queremos saber que número complejo es el cociente* $\frac{3-7i}{8+2i}$ *multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.*

Así

$$\frac{3 - 7i}{8 + 2i} = \frac{3 - 7i}{8 + 2i}\frac{8 - 2i}{8 - 2i} = \frac{24 - 14 + i(-6 - 56)}{8^2 + 2^2}$$
$$= \frac{10 - 62i}{68} = \frac{10}{68} - \frac{62}{68}i = \frac{15}{34} - \frac{31}{34}i \quad \square$$

Cuando se manipulan números complejos z, aveces es necesario escribirlo en la forma $z = a + bi$ y otras tal cuál usando las propiedades de cuerpo.

Ejemplo 2. *Tenemos que encontrar los número complejos de modo que* $\overline{z} = z^{-1}$.

Demostración: Si multiplicamos la igualdad por z

$$z\overline{z} = zz^{-1} = 1.$$

Ahora si $z = x + yi$, se sigue que

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = 1.$$

Los puntos del plano $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ son los puntos de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es