

ÁLGEBRA LINEAL.

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO.

Hay otra forma de escribir los números complejos, la llamada **forma polar**. Veremos que esta forma de escribir los complejos da sentido geométrico a la multiplicación (la suma ya vimos que lo tenía, la Regla del Paralelogramo).

Definición 1. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama **módulo** de z al escalar

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observación 1. El módulo $|z|$ de un complejo z es igual al módulo (o norma) de un vector z en \mathbb{R}^2 ($\|z\|$, la distancia de z al origen) y por tanto tiene las mismas propiedades:

- a) $|z| \geq 0$; si $|z| = 0$, entonces $z = 0$.
- b) $|zw| = |z||w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.
- c) $|z + w| \leq |z| + |w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Demostración: Los apartados a) y b) quedan como ejercicios (son muy fáciles).

El apartado c) es una consecuencia de la llamada desigualdad de Cauchy-Schward.

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ se llama **producto escalar** de z y w al número

$$\langle z, w \rangle = ac + bd.$$

Observemos que $|z|^2 = \langle z, z \rangle$. Veamos la **desigualdad de Cauchy-Schward**

$$|\langle z, w \rangle| \leq |z||w|$$

Tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y calculamos

$$|\lambda z - w|^2 = \langle \lambda z - w, \lambda z - w \rangle = \lambda^2 |z|^2 - 2\lambda \langle z, w \rangle + |w|^2.$$

Como $|\lambda z - w|^2 \geq 0$, el polinomio en λ de arriba no puede tener raíces reales, luego su discriminante

$$4(\langle z, w \rangle)^2 - 4|z|^2|w|^2 \leq 0$$

y de aquí se deduce que

$$|\langle z, w \rangle| \leq |z||w|.$$

Ahora como

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= \langle z+w, z+w \rangle = \langle z, z \rangle + 2\langle z, w \rangle + \langle w, w \rangle \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2. Para $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se llama

- **módulo** de z a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- **argumento** de z a $\text{Arg} z = \angle(1, 0)z \in [0, 2\pi) = \theta$, el ángulo que forma el eje OX con el vector determinado por z (ver el dibujo de abajo);
- **forma polar** de z a

$$z = |z|(\cos \theta + i \text{sen} \theta) = |z|e^{i\theta},$$

(ver Apéndice para entender la última igualdad).

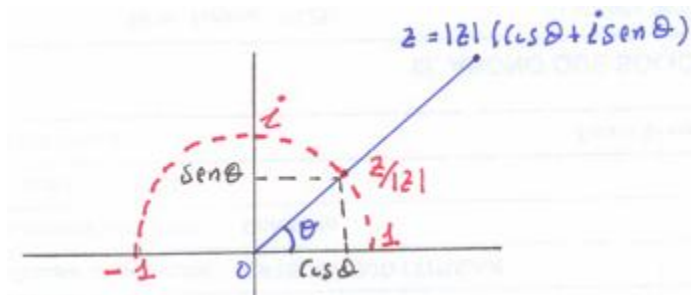


FIGURA 1. Forma polar de un complejo.

La forma polar de un número complejo nos permite entender mejor la multiplicación en \mathbb{C} . Después de la siguiente Proposición entenderemos que un productos de complejos no es más que un **giro** junto con una **homotecia**.

Proposición 1. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, con

$$z = |z|(\cos \theta + i \text{sen} \theta) \quad y \quad w = |w|(\cos \beta + i \text{sen} \beta),$$

entonces se tiene que

$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \beta) + i \operatorname{sen}(\theta + \beta))$$

Demostración:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \\ &= |z||w|((\cos \theta \cos \beta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta) + i(\cos \theta \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \theta \cos \beta)) \\ &= |z||w|(\cos(\theta + \beta) + i \operatorname{sen}(\theta + \beta)) \quad \square \end{aligned}$$

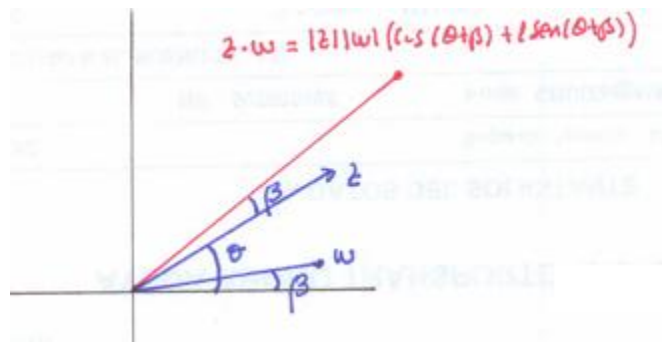


FIGURA 2. Giro con homotecia.

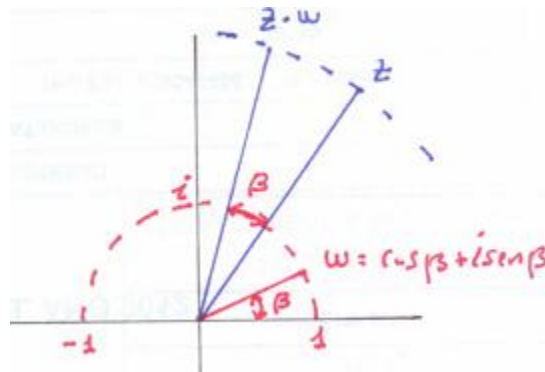


FIGURA 3. Giro para $|w| = 1$.

Con esta nueva imagen del producto de complejos, ahora es fácil calcular raíces de números complejos.

Proposición 2. **a:** Para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$z^n = |z|^n (\cos(n \operatorname{Arg} z) + i \operatorname{sen}(n \operatorname{Arg} z)).$$

b: Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ existe un $k \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w + 2k\pi.$$

c: Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Antes de hacer la demostración veamos algunas consideraciones sobre los enunciados. En primer lugar, el apartado **c)** nos dice que existen n raíces n -ésimas de todo complejo no nulo.

Notación: Para $z = 1$ sus n raíces n -ésimas se pueden escribir de la forma

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

donde $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ (fórmula de Euler, ver Apéndice).

En el siguiente ejemplo mostramos lo que nos dice el apartado **b)**.

Ejemplo 1. Si $z = -1$ y $w = -i$, entonces $\operatorname{Arg} z = \pi$, $\operatorname{Arg} w = \frac{3\pi}{2}$ y $zw = i$. Luego

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w - 2\pi = \pi + \frac{3\pi}{2} - 2\pi.$$

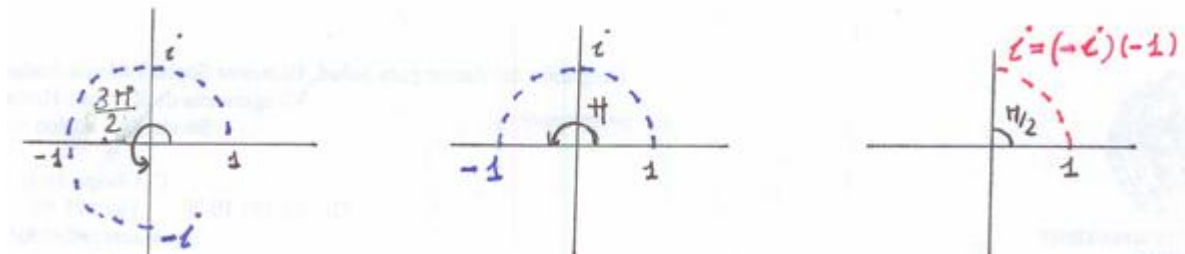


FIGURA 4. Argumentos mayores que 2π .

Demostración:

a: Se sigue directamente de la Proposición anterior aplicando la fórmula de multiplicación n veces.

b: Como

$$0 \leq \text{Arg}z < 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq \text{Arg}w < 2\pi,$$

entonces $0 \leq \text{Arg}z + \text{Arg}w < 4\pi$. Ahora si

$$\text{Arg}z + \text{Arg}w \in [0, 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \text{Arg}(zw) = \text{Arg}z + \text{Arg}w.$$

En otro caso,

$$\text{Arg}z + \text{Arg}w \in [2\pi, 4\pi) \quad \Rightarrow \quad \text{Arg}(zw) = \text{Arg}z + \text{Arg}w - 2\pi \in [0, 2\pi).$$

c: Si tenemos una raíz n -ésima de z ($w^n = z$), como

$$w^n = |w|^n (\cos(n\text{Arg}w) + i \text{sen}(n\text{Arg}w)) = |z|(\cos \theta + i \text{sen} \theta).$$

y la forma polar de un número complejo es única siempre que el argumento permanezca en el intervalo $[0, 2\pi)$, se sigue que

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\text{Arg}w = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \text{Arg}w = \frac{\theta + 2k\pi}{n}. \end{cases}$$

Observemos que

$$\frac{\theta}{n} < \frac{\theta + 2\pi}{n} < \frac{\theta + 4\pi}{n} < \dots < \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} < \frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Vemos que para los n valores de $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, tenemos n argumentos distintos de la forma $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$; para otros valores del argumento de w dados por otros k , solo conseguimos repetir las raíces que ya tenemos \square

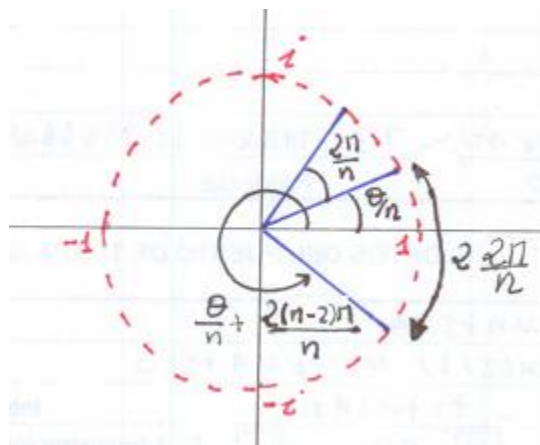


FIGURA 5. $\cos \frac{\theta}{n} = \cos(\frac{\theta}{n} + 2\pi)$.

Ejemplo 2. Vamos a calcular las raíces cúbicas de la unidad $\sqrt[3]{1}$.

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Luego las tres raíces que nos salen son $z_1 = 1$, $z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ y por último $z_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Observemos que las tres raíces sobre la circunferencia unidad dibujan un triángulo equilátero \square

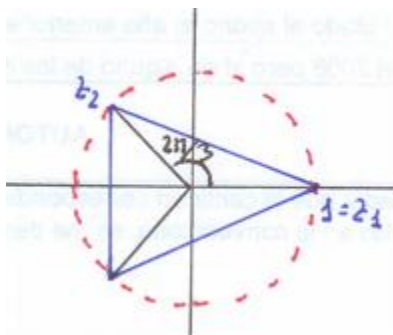


FIGURA 6. Raíces cúbicas de la unidad.

Ejemplo 3. Vamos a calcular las raíces cuartas de -1 , $\sqrt[4]{-1}$.

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} \left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Luego las cuatro raíces que nos salen son $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_3 = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ y por último $z_4 = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$. Observemos que las cuatro raíces sobre la circunferencia unidad dibujan un cuadrado \square

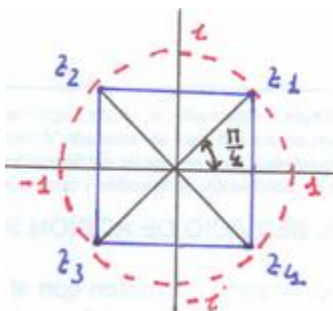


FIGURA 7. Raíces cuartas de -1 .

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es