SEGUNDO PARCIAL de MMI

Jueves 13 de Junio de 2013

1. Demuestra que las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0.$$

2. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ calcula una matriz regular Q tal que $QB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. Se dice que las matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conmutan si y solo si $AB = BA$. Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, halla todas las matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que conmuten con C.

4. Demuestra que el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ formado por los elementos (w, x, y, z) que verifican

$$w + x + y + z = 0 \qquad w - x + y - z = 0$$

es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot\mathbb{R})$.

5. Halla la matriz, en la base canónica, de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo es el subespacio generado por $\overrightarrow{u_1} = (-1, 2, 0)$ y $\overrightarrow{u_2} = (1, -1, 1)$, y verifica $f(1, 2, 2) = (2, 4, 4)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que en las bases $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ y $B' = \{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\}$ está definida por

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1'} - 2\overrightarrow{e_2'} + 3\overrightarrow{e_3'}, \quad f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1'} - \overrightarrow{e_2'}, \quad f(\overrightarrow{e_3}) = 2\overrightarrow{e_1'} - 3\overrightarrow{e_2'} + 3\overrightarrow{e_3'}, \quad f(\overrightarrow{e_4}) = -\overrightarrow{e_2'} + 3\overrightarrow{e_3'}.$$

Halla bases y dimensiones del núcleo y de la imagen de f.

7. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0.$

8. Utilizando el teorema de Rouché, discute y resuelve el sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & az & = & b \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$

9. Halla los autovalores y autovectores del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z).$$

10. Halla la forma diagonal y una base de autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las notas se publicarán el ~~lunes~~ Jueves 20 a las 12 horas. La revisión se efectuará el ~~martes~~ Viernes 21 a las 15 horas en el aula 13. No es obligatorio asistir.

Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada ejercicio se resolverá en una cara de un folio.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula en los primeros 45 minutos.