EXAMEN PARCIAL MMI-ÁLGEBRA

Lunes 16 de Junio de 2014

1.- Calcula todos los números $z \in \mathbb{C}$ para los cuales $z^3 = 8i$.

2.- Calcula la forma normal de Hermite por filas de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.- Para los diferentes valores del parámentro $p \in \mathbb{R}$ resuelve por Gauss el siguiente sistema: $\left\{\begin{array}{ccccc} y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 4z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & = & p \end{array}\right.$.

4.- Demuestra que el conjunto formado por los vectores

$$\left\{1 + x, x^2, 1 + x^2, 3x - 2x^2\right\}$$

es linealmente dependiente en el espacio de los polinomios con coeficientes racionales y grado menor o igual que dos.

5.- Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$ respecto de la nueva base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ sabiendo que

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}, \qquad \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}, \qquad \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}.$$

Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ respecto de la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$.

6.- Sean f y g dos aplicaciones lineales de $(V_2, +, .\mathbb{R})$ en sí mismo, tales que $f(\overrightarrow{u_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $g(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{v_1} - 3\overrightarrow{v_2}$ y $g(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, siendo $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$, $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ tres bases del espacio vectorial. Halla:

a) La matriz de la aplicación $g \circ f$.
b) El núcleo y la imagen de $g \circ f$.
c) Las ecuaciones de la composición $(g \circ f)$.

7.- Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix} = 0.$

8.- Discute por Rouché:

$$\left.\begin{array}{r} (m+2)x + y + z = m-1 \\ mx + (m-1)y + z = m-1 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{array}\right\} .$$

9.- ¿Cuál es la condición analítica(¡ que ecuaciones hay que resolver!) para que el vector $(1, 0, -1, 2)$ de $\mathbb{R}^4$ tenga originales en la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, cuya matriz respecto de las bases canónicas es M? Halla todos sus originales.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10.- Calcula la potencia A^{33} de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 4 & 6 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

La revisión del examen se efectuará el día 30 de Junio a las 16 horas en el aula 11. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada pregunta se resolverá en una cara de un folio y todas las preguntas se contestarán por orden.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.