ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

Para calcular integrales impropias, usando la definición de las mismas, primero calculamos una integral de Riemann (calculamos una primitiva y después usamos la Regla de Barrow) y por último calculamos un límite. Ahora bien, no siempre se puede calcular una primitiva de una función. Por ejmplo, la función

$$f(x) = e^{-x^2}$$

no admite una primitiva en términos elementales. Sin embargo la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

es una integral muy importante (en Estadística; ver el artículo de Aplicaciones).

Como en el caso de la Series, tenemos recursos para decidir si una integral impropia existe o no, sin necesidad de calcularla. Para ello tenemos los **criterios de convergencia**. Solo vamos a ver dos. Hay más. Como en el caso de series los veremos para funciones positivas. Además **solo** los vamos a enunciar para el extremo derecho del dominio; para la parte izquierda se tiene resultados del todo análogos.

Proposición. 1. ***(Criterio de Comparación.)*** *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$ o $b = \infty$, dos funciones positivas ($f, g \geq 0$) para las que se verifica que*

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo} \quad x \in (a, b),$$

entonces

a: *si existe* $\int_a^b g(x)dx$ *también existe la de la función* f *y*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

b: *si **no** existe* $\int_a^b f(x)dx$ *tampoco existe la integral de* g.

Demostración: Como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces

$$\int_a^s f(x)dx \leq \int_a^s g(x)dx \quad \text{para todo} \quad s \in (a,b)$$

y por tanto

$$\lim_{s \to b^-} \int_a^s f(x)dx \lim_{s \to b^-} \leq \int_a^s g(x)dx$$

□

Ejemplo. 1. *¿Converge* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$*?*

Demostración: $f(x) = e^{-x^2} = e^{-(-x)^2} = f(-x)$ es una función **par**, por tanto es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

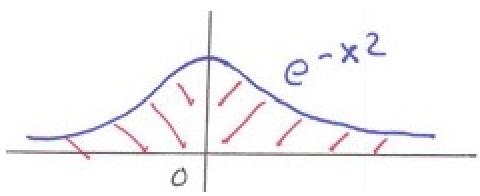

FIGURA 1. Campana de Gauss.

Como en el caso de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$ (vista en el artículo anterior) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Ahora es fácil convencerse que

$$e^{-x^2} < e^{-x} \quad \text{para todo} \quad x > 1,$$

y así

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx < \int_0^1 e^{-x^2} + \int_1^{\infty} e^{-x} dx < \infty.$$

Luego nuestra integral es convergente □

Ejemplo. 2. *Tenemos que determinar si existe* $\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx$.

Demostración: El problema lo tenemos en $x = 1$ ya que allí el logaritmo se anula. Si recordamos la gráfica del logaritmo,

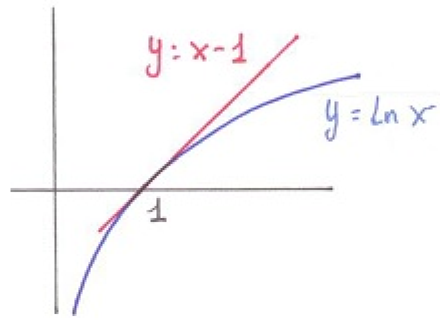

Figura 2. Gráfica del logaritmo.

vemos que la recta tangente a su gráfica por el punto $(1,0)$ es la recta $y = x-1$. como el logaritmo es una función concave tenemos que

$$\ln x < x - 1 \quad \text{para todo} \quad x > 1$$

y por tanto

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{\ln x} \quad \text{para todo} \quad x > 1.$$

Luego para todo $r \in (1,2]$

$$\int_r^2 \frac{1}{x-1}dx < \int_r^2 \frac{1}{\ln x}dx.$$

Ahora

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx = \lim_{r\to 1^+} \int_r^2 \frac{1}{x-1}dx = \lim_{r\to 1^+} \ln(x-1)|_2^r = \lim_{r\to 1^+} \ln 2 - \ln(r-1) = \infty.$$

Luego nuestra integral que sería más grande tampoco converge.

□

Proposición. 2. *(**Criterio de Comparación por Cociente.**) Sean $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$ o $b = \infty$, dos funciones positivas ($f, g \geq 0$) para las que se verifica que*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0, \quad \textit{con} \quad l \in \mathbb{R},$$

entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$ *existe si y solo si existe la integral* $\int_a^b g(x)dx$.

Demostración: De la definición de límite, si $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$, para $\epsilon = \frac{l}{2}$ existe un $\delta > 0$ de modo que si $x \in (b-\delta, b)$, entonces

$$\frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3l}{2};$$

y por tanto

$$\frac{l}{2}g(x) \le f(x) \le \frac{3l}{2}g(x) \quad \text{para todo} \quad x \in (b-\delta, b).$$

Como las integrales de Riemann $\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ y $\int_a^{b-\delta} g(x)dx$ existen, ya solo hace falta aplicar el Criterio de Comparación a las integrales $\int_{b-\delta}^{b} f(x)dx$ y $\int_{b-\delta}^{b} g(x)dx$ $\square$

Ejemplo. 3. *Queremos sabe si es convergente la integral* $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

Demostración: Encontrar una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$ no parece sencillo. Por otro lado la función dada es continua en todo $\mathbb{R}$, luego nuestra integral impropia se debe a que consideramos una semirecta. Mirando el cociente $\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$, vemos que este es parecido a $\frac{1}{x^2+x^{4/3}+1}$. Así

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}} = 1.$$

Luego

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}.$$

La segunda integral converge ya que lo hace $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es