EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

28 de Enero de 2021.

1.- Estudia la convergencia puntual y uniforme en el dominio real de la serie

$$S(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}^2(n+x)}{n^2+x^2}$$

2.- Calcula la serie de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 0 & si \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & si \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

definida sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$.

3.- Dado el problema

$$\begin{cases} x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t) \\ x(0) = K_1, \quad x'(0) = K_2. \end{cases}$$

Encuentra a, b, K_1, K_2 y $f(t)$ para que la función

$$x(t) = 3e^{-t} + e^{2t} + sent$$

sea la solución del problema.

4.- Calcula

$$x = 5^{328} + 1274^{328} \qquad \text{mod. } 25.$$

Justifica tu respuesta.

5.- Calcula el máximo común divisor de $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ y $Q(x) = x^2 - 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$. Encuentra polinomios $R(x)$ y $S(x)$ en $\mathbb{Z}_3[x]$ de modo que

$$m.c.d(P, Q) = R(x)P(x) + S(x)Q(x).$$

6.- Sea $A := \mathbb{Z}_4[x]/(x^2 + x + 1)$,
a) Encuentra el grupo de las unidades $(A^*, \cdot)$.
b) Calcula el representante de $\alpha = [x^2 + 1] \in A$ y su inversa si existe.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 2h 55' horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

A LAS 11H 55' TODOS DEBEMOS ESTAR FUERA DEL AULA

Revisión del examen:
.- No será presencial.
.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-20-21/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/
.- Si un alumno está en desacuerdo con su nota deberá enviar un e-mail a su profesor, al menos 24 horas antes de la revisión, indicando el motivo de su petición.
.- El día y a la hora de la revisión el alumno deberá estar pendiente de que el profesor se ponga en contacto con él.

La revisión del examen se efectuará el día 10 de Febrero a las 18 h. No es obligatorio solicitar la revisión.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Las siguientes funciones tienen por Transformadas de Laplace las funciones en s que figuran a su lado:

(1) Si $f(t) = 1$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s}$

(2) Si $f(t) = \text{sen}(t)$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s^2+1}$

(3) Si $f(t) = \cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

(4) Si $f(t) = e^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$

(5) Si $f(t) = \text{senh}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

(6) Si $f(t) = \cosh(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$

(7) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\text{sen}(\beta t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(8) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(9) En general, dada $f(t)$, entonces $L[e^{-\alpha t}f(t)](s) = Lf(s+\alpha)$

(10) Si $f(t) = t^n$, entonces $Lf(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, ($\Gamma$ es la función Gamma de Euler, $\Gamma(n+1) = n!$).

(11) Si $f(t) = te^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$

(12) Si $f(t) = t\text{sen}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(13) Si $f(t) = t\cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(14) En general, dada $f(t)$, entonces $L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{\partial^n Lf(s)}{\partial s^n}$

PROBLEMA 1: $S(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}^2(n+x)}{n^2+x^2}$

$0 \le |\operatorname{sen} y| \le 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, por tanto

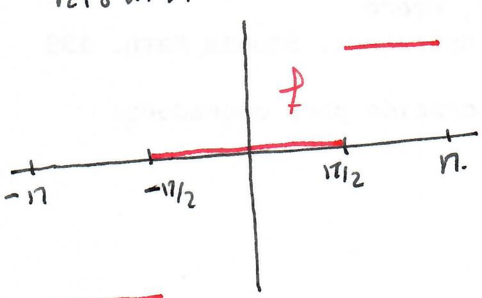
$$\left| \frac{\operatorname{sen}^2(n+x)}{n^2+x^2} \right| \le \frac{1}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$n^2+x^2 \ge n^2$

Como la serie numérica $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, la prueba M-Weierstrass nos dice que la serie de funciones converge uniformemente a su límite puntual $S(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 2: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \le x \le -\pi/2 \\ 0 & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 1 & \text{si } \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$

Representamos f



f es una función impar, por tanto, al calcular los coeficientes de la serie de Fourier $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx =$

f es 2π-periódica

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} -\operatorname{sen} nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \left(-\frac{\cos nx}{n} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left(\cos n\frac{\pi}{2} - \cos n\pi - \cos n\pi + \cos \frac{n\pi}{2} \right)$$

$\cos x$ par

$$= \frac{2}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi \right) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}\left((-1)^k - 1\right) & n = 2k \\ \frac{2}{n\pi} & n = 2k+1 \end{cases}$$

ASÍ $b_n = \begin{cases} 0 & \text{SI } n \equiv 0 \mod 4 \\ \frac{2}{n\pi} & \text{SI } n \equiv 1 \text{ ó } 3 \mod 4 \\ -\frac{4}{n\pi} & \text{SI } n \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$

Y ASÍ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}((2k+1)x) + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{(4k+2)\pi} \operatorname{sen}((4k+2)x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}((2k+1)x) + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{2}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}((4k+2)x).$$

3: $x''(t) + a x'(t) + b x(t) = f(t)$

$x(0) = k_1, \quad x'(0) = k_2$

$x(t) = 3e^{-t} + e^{2t} + \operatorname{sen} t$

COMO $x(0) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow \boxed{k_1 = 4}$

COMO $x'(t) = -3e^{-t} + 2e^{2t} + \cos t \Rightarrow x'(0) = -3 + 2 + 1 = \boxed{0 = k_2}$

POR OTRO LADO LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE LA E.D.O HOMOGÉNEA $x'' + ax' + bx = 0$ ES

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

SI QUEREMOS QUE e^{-t} Y e^{2t} SEAN SOLUCIONES DE LA HOMOGÉNEA, ENTONCES ($\lambda = -1$ Y $\lambda = 2$ SOLUCIONES)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

ASÍ $\boxed{a = -1}$ Y $\boxed{b = -2}$

ASÍ PARA $x'' - x' - 2x = 0$ $\quad x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL.

AHORA IMPONEMOS QUE $y(t) = \operatorname{sen} t$ SEA UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O NO HOMOGÉNEA $x'' - x' - 2x = f(t)$

Y ASÍ

$y(t) = \text{sen}t$

$y'(t) = \cos t$

$y''(t) = -\text{sen}t$

LUEGO $-\text{sen}t - \cos t - 2\,\text{sen}t = f(x)$

POR TANTO $\boxed{f(x) = -3\,\text{sen}t - \cos t.}$

PROBLEMA 4. $x = 5^{328} + 1274^{328} \mod 25$

OBSERVEMOS QUE $5^{328} = 5^{2\times 164} = (25)^{164}$

COMO $25 \equiv 0 \mod 25$

SE SIGUE QUE $5^{328} \equiv 0 \mod 25$

POR OTRA PARTE $1274 \div 25$: 024, 5

$1274 \equiv 24 \equiv -1 \mod 25$

ASÍ $1274^{328} \equiv (-1)^{328} \equiv 1 \mod 25$

328 PAR

LUEGO $x \equiv 1 \mod 25.$

PROBLEMA 5:] $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ $\quad Q(x) : x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$

PARA CALCULAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR USAMOS EL ALGORITMO DE EUCLIDES

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + 1 & x^2 - 1 \\ \hline -2x^3 \qquad +2x & 2x - 1 \\ \hline \quad -x^2 + 2x + 1 & \\ \quad\ \ x^2 \qquad -1 & \\ \hline \qquad\quad 2x & \end{array}$$

AHORA
$$\begin{array}{l|l} x^2 - 1 & 2x \\ \hline -x^2 & 2x \\ \hline \quad -1 & \end{array}$$

ASÍ P y Q NO TIENEN DIVISORES COMUNES

$1 = m.c.d(P, Q)$.

AHORA

i	0	1	2	3
r_i	$P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$	$Q(x) = x^2 - 1$	$2x$	-1
q_i		$2x - 1$	$2x$	
α_i	1	0	1	$-2x$
β_i	0	1	$x + 1$	$1 - 2x(x+1)$

y TENEMOS QUE

$$-1 = (-2x)(2x^3 - x^2 + 1) + (1 - 2x(x+1))(x^2 - 1)$$
$$= \underbrace{x}_{R(x)}(2x^3 - x^2 + 1) + \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{S(x)}(x^2 - 1)$$

— o — COMPROBACIÓN

$$\begin{array}{rcl} x(2x^3 - x^2 + 1) & = & 2x^4 - x^3 + x \\ (x^2+x+1)(x^2-1) & = & + \ x^4 + x^3 - x - 1 \\ \hline & & -1 \end{array}$$

PROBLEMA 6:) $\mathbb{Z}_4[x]$ ES UN ANILLO

$p(x) = x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_4[x]$ ES UN POLINOMIO DE GRADO 2 Y

$p(0) = 1$
$p(1) = 3$
$p(2) = 7 \equiv 3 \mod 4$
$p(3) = 13 \equiv 1 \mod 4$

NO TIENE RAÍCES, LUEGO p ES IRREDUCIBLE.

AHORA COMO $\mathbb{Z}_4$ NO ES UN CUERPO, NO SIEMPRE PODEMOS DIVIDIR EN $\mathbb{Z}_4[x]$; POR TANTO EL TEOREMA DEL RESTO O EL ALGORITMO DE FUNCIONES NO SIEMPRE FUNCIONAN

a) $\frac{\mathbb{Z}_4[x]}{p} = \{0, 1, 2, 3, x, x+1, x+2, x+3, 2x, 2x+1, 2x+2, 2x+3, 3x, 3x+1, 3x+2, 3x+3\}$

AQUÍ 2 ES DIVISOR DE CERO, PERO TAMBIÉN PODRÍA SER $2x$ Y $2x+2$.

LUEGO $(A^*, \cdot)$ EL GRUPO DE UNIDADES (ELEMENTOS CON INVERSO)

$A^* = \{1, 3, x, x+1, x+2, x+3, 2x+1, 2x+3, 3x, 3x+1, 3x+2, 3x+3\}$.

ES HACIENDO LA COMPROBANDO LA FORMA DE MULTIPLICAR. AHORA COMO TABLA DE

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x^2} = -x-1 = \underline{3x+3} \\ \underline{2x^2} = \dots = \underline{2x+2} \\ 3x^2 = \dots = x+1 \end{cases}$$

HACIENDO LA TABLA VEMOS QUE

$$\begin{cases} x\,(3x+3) = 3x^2+3x = 1 \\ (x+1)\,3x = 3x^2+3x = 1 \\ (x+2)\,(x+3) = x^2+x+2 = 1 \\ (2x+1)\,(2x+1) = 4x^2+4x+1 = 1 \\ (2x+3)\,(2x+3) = 4x^2+12x+1 = 1 \\ (3x+1)\,(3x+2) = x^2+x+2 = 1 \end{cases}$$

EFECTIVAMENTE. A^* ES COMO LO HABÍAMOS DICHO

b) $\alpha = [x^2+1] \in A$ COMO $x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2+1 = -x = 3x$

LUEGO $3x$ ES EL REPRESENTANTE DE x^2+1

Y LLEGAMOS A LA TABLA $3x\,(x+1) = 0$ (O TAMBIÉN

$0 = x^2+x+1 = x(x+1)+1 \Rightarrow x(x+1) = -3$ LUEGO $3x(x+1) = 1$.