EXAMEN DE CÁLCULO

Martes 26 de Enero de 2021.

1. Determina los números reales que verifican:

$$|x^2 - r| \leq s$$

paramétros r y s según hoja adjunta.
$r = 1, 2, 3, 4, ...$ y $s = 8, 9, 10....$

2. Determina si la siguiente sucesión, definida por recursión, es convergente:
$a_0 = 6$ y

$$a_n = a_{n-1}(\frac{sn}{n+r}), \qquad \text{para} \qquad n \geq 1.$$

$r = 4, 5, 6, 7, ...$ y $s = 1, 2, 1, 2....$

3. Suma la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+2} - s^{n+3}}{(2s)^n}$$

$r = 1/2, 1/4, 1/8, ...$ y $s = 1, 1/2, 1/4, ...$

4. ¿La siguiente ecuación tiene alguna solución?

$$\frac{x^r - 330x^s + x - 1}{\operatorname{sen}^s x + 1} = 0$$

$r = 17, 19, 21, ...$ y $s = 14, 16, 18, ...$

5. Representa la gráfica de la siguiente función (determina el dominio y las asíntotas; calcula extremos relativos y puntos de inflexión, en el caso de que existan; determina el crecimiento y decrecimiento de la función así como su concacivad y convexidad):

$$f(x) = \frac{x^2 - rx - s}{rx - s}.$$

$r = 7, 8, 9, ...$ y $s = 3, 4, 5, ...$

6. Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{re^x}{e^{sx} + 2e^x + 1}\, dx.$$

$r = 4, 5, 6, 7.....$ y $s = 1, 2, 1, 2....$

7. Calcula la siguiente integral impropia, si existe:

$$\int_{-\infty}^{r} e^{-rx} \cos sx\, dx$$

$r = -\pi, -2\pi, -3\pi, ...$ y $s = 2, 4, 6, 8, ...$

8. Halla el área del recinto limitado entre las gráficas $y = re^{sx}$ e $y = re^{-sx}$ y las rectas $x = -r$ y $x = r$.
$r = 4, 6, 8, ...$ y $s = 3, 4, 3, 4, ...$

Para el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada ejercicio se resolverá en una cara.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir en los primeros 45 minutos.

Mira detrás las condiciones de la revisión

Revisión del examen:

.- Las notas del examen estarán disponible el día ...4... de Febrero por la tarde (20h).
.- **No será presencial la revisión.**
.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-20-21/calculo/examenes/
.- Si un alumno está en desacuerdo con su nota deberá enviar un e-mail al coordinador de la asignatura (Cesar Ruiz e-mail: cruizb@mat.ucm.es), antes de las 16h del día 5 de Febrero, indicando el motivo de su petición (problema o problemas de su desacuerdo).
.- Los profesores correctores del examen se comprometen a contestar (por e-mail) a las peticiones de revisión antes de las 18h del día 8 de Febrero.

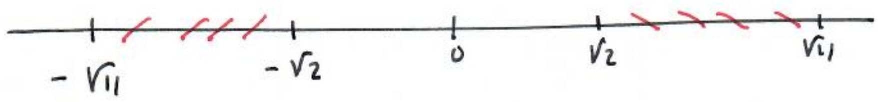
No es obligatorio solicitar la revisión.

PROBLEMA 1:) $|x^2-2| \le 9$ $\left.\right\}$ r = 2 y s = 9

- Si $|x| \ge \sqrt{2}$, entonces

$$|x^2-2| = x^2-2 \le 9 \iff x^2 \le 11$$

y $|x| \le \sqrt{11}$



$x \in [-\sqrt{11}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{11}]$

- Si $|x| < \sqrt{2}$, entonces

$$|x^2-2| = 2-x^2 \le 9 \iff -7 \le x^2$$

lo cual siempre es cierto;

La solución del problema es $[-\sqrt{11}, \sqrt{11}]$.

PROBLEMA 2:) $a_n = a_{n-1}\left(\frac{n}{n+2}\right)$ $\left.\right\}$ r = 4, s = 1

$\frac{n}{n+2} < 1$, así $a_n < a_{n-1}\left(\frac{n}{n+2}\right)$ la sucesión es decreciente y si $a_{n-1} \ge 0 \Rightarrow a_n \ge 0$ (por inducción) está acotada inferiormente, luego la sucesión converge.

$\left.\right\}$ r = 5, s = 2

$\frac{2n}{n+2} \ge 1'5$ si $n \ge 30$

Luego $a_n > a_{n-1}\left(\frac{2n}{n+2}\right)$ si $n \ge 30$

la sucesión es creciente y no acotada ya que $(1'5)^r \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$.

PROBLEMA 3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}}{\left(2\,\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

$r = \frac{1}{4}$

$S = 1/2$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} =$$

$$= \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} =$$

SERIES GEOMÉTRICAS

$$= \frac{1}{16}\, \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{8}\, \frac{1}{1-1/2} =$$

$$= \frac{1}{16}\, \frac{4}{3} - \frac{1}{8}\, \frac{2}{1} = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} - \frac{3}{12} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

PROBLEMA 4:

$$\frac{x^{17} - 330x^{14} + x - 1}{\operatorname{sen}^{14} + 1} = 0$$

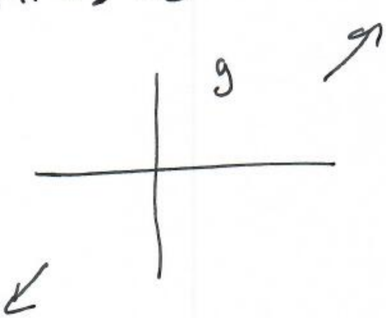
LA FUNCIÓN $f(x) = \dfrac{x^{17} - 330x^{14} + x - 1}{\operatorname{sen}^{14} + 1}$

ES CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}$ $(\operatorname{sen}^{14} + 1 \geq 1)$

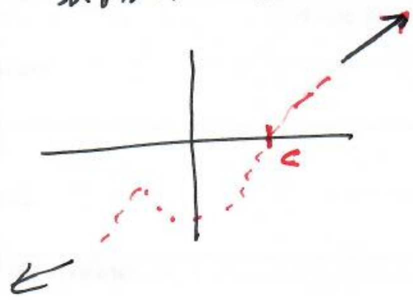
LUEGO $f(x) = 0 \iff g(x) = x^{17} - 330x^{14} + x - 1 = 0$

AHORA $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$



COMO g ES CONTINUA Y POR EL TEOREMA DE BOLZANO, AL MENOS EXISTE $c \in \mathbb{R}$ TAL QUE $g(c) = 0$



LA ECUACIÓN AL MENOS TIENE UNA RAÍZ.

PROBLEMA 5.- $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x - 3}{7x - 3}$ $\quad r = 7$, $s = 3$

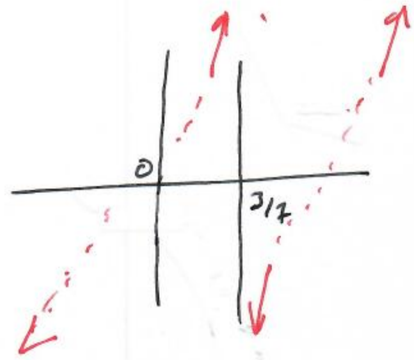
- Dom f: $\mathbb{R} - \{\frac{3}{7}\}$ (observemos que $(\frac{3}{7})^2 - 7\frac{3}{7} - 3 < 0$).

- Límites $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{7}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3/7^+} f(x) = -\infty$$



$\boxed{x = \frac{3}{7} \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}}$

- $f(x) = 0 \iff x^2 - 7x - 3 = 0 \iff$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+12}}{2} : \begin{cases} \frac{7+\sqrt{61}}{2} > 0 \\ \frac{7-\sqrt{61}}{2} < 0 \end{cases}$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 7x - 3}{7x^2 - 3x} = \frac{1}{7}$$

Además $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - \frac{1}{7}x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 7x - 3}{7x - 3} - \frac{x}{7} =$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{7x^2} - 49x - 21 - \cancel{7x^2} - 3x}{49x - 21} =$$

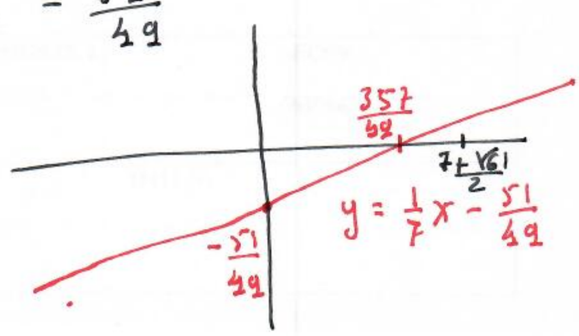
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-51x - 21}{49x - 21} = -\frac{51}{49}$$

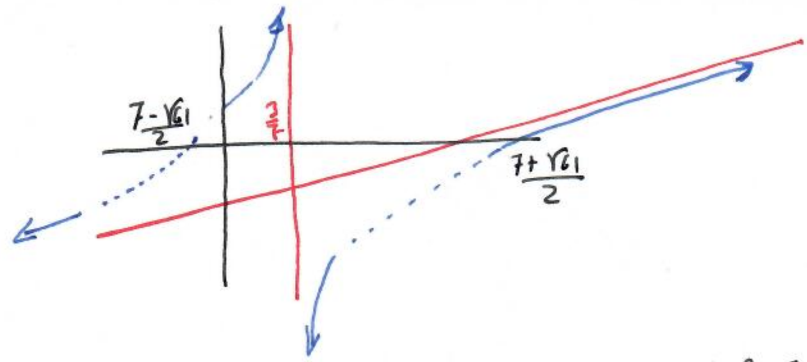
$\boxed{y = \frac{1}{7}x - \frac{51}{49} \text{ ASÍNTOTA OBLICUA}}$

Observemos que $\frac{7+\sqrt{61}}{2} \geq \frac{357}{49} \iff$

$343 + 49\sqrt{61} \geq 714$

$49\sqrt{61} \geq 714 - 343 = 371$





DERIVADAS $\quad f'(x) = \dfrac{(2x-7)(7x-3) - 7(x^2-7x-3)}{(7x-3)^2} =$

$$= \frac{1}{(7x-3)^2}\left[14x^2 - 55x + 21 - 7x^2 + 49x + 21\right] =$$

$$= \frac{1}{(7x-3)^2}\left[7x^2 - 6x + 42\right] \geq 0$$

$$6^2 - 4 \times 7 \times 42 < 0$$

NO TIENE RAICES

LUEGO LA GRÁFICA SIEMPRE ES CRECIENTE. COMO HEMOS DIBUJADO.

CONVEXIDAD

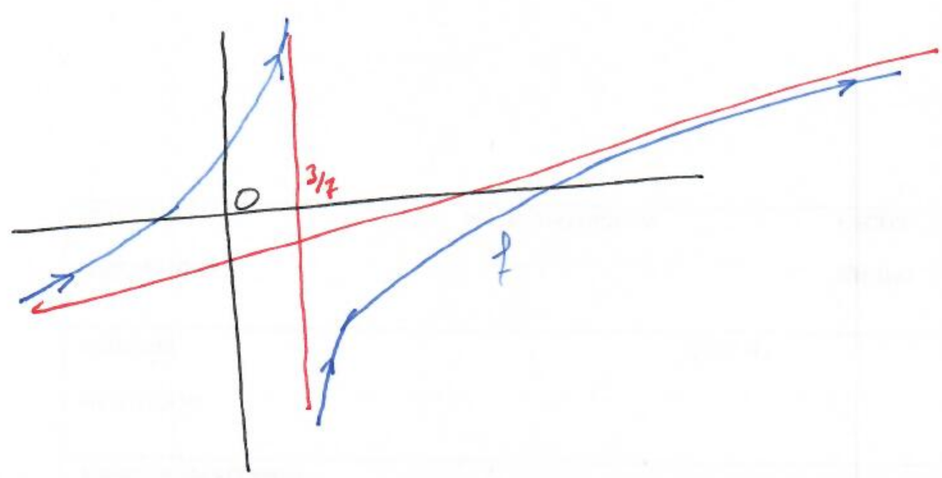
$$f'(x) = \left[\frac{7}{49}(7x-3)^2 + \left(42 - \frac{9}{7}\right)\right]\frac{1}{(7x-3)^2}$$

$$\begin{array}{l|l} 7x^2 - 6x + 42 & 49x^2 - 42x + 9 \\ \hline -7x^2 + 7\frac{42}{49} + \frac{63}{49} & \frac{7}{49} \\ \hline 0 \quad 42 - \frac{9}{7} & \end{array}$$

ASÍ $\quad f''(x) = \left(42 - \frac{9}{7}\right)\dfrac{-14}{(7x-3)^3}$

LUEGO $f'' > 0$ SI $x < \frac{3}{7}$ Y ALLÍ f ES CONVEXA

$f'' < 0$ SI $x > 3/7$ Y ALLÍ f ES CONCAVA



PROBLEMA 6:

$$\int \frac{4e^x}{e^x+2e^x+1}\,dx =$$

SS $r=3$, $s=1$

$$= 4\int \frac{e^x}{3e^x+1} = 4/3 \int \frac{3e^x}{3e^x+1}\,dx =$$

$(3e^x) = (3e^x+1)'$

$$= 4/3 \ln(3e^x+1)$$

$$\int \frac{5e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx =$$

SS $r=5$, $s=2$

$$= 5\int \frac{e^x}{(e^x)^2+2e^x+1}\,dx =$$

$u = e^x$
$du = e^x dx$

$$= 5\int \frac{1}{u^2+2u+1}\,dx =$$

$$= 5\int \frac{1}{(u+1)^2}\,dx = \frac{-5}{u+1} = \frac{-5}{e^x+1}$$

PROBLEMA 7:

$$\int_{-\infty}^{-\pi} e^{\pi x}\cos 2x\,dx =$$

partes

$r=-\pi$
$s=2$

$$= \frac{e^{\pi x}}{\pi}\cos 2x \Big|_{-\infty}^{-\pi} + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\pi} e^{\pi x}\operatorname{sen} 2x\,dx =$$

$$= \frac{e^{-\pi^2}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\pi} e^{\pi x}\operatorname{sen} 2x\,dx =$$

partes

$\lim_{x\to-\infty} e^{\pi x} = 0$
y
$\cos(-2\pi) = 1$

$$= \frac{e^{-\pi^2}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{\pi x}}{\pi}\cancel{\operatorname{sen} 2x}\Big|_{-\infty}^{-\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\pi} e^{\pi x}\cos 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{e^{-\pi^2}}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{-\pi} e^{\pi x}\cos 2x\,dx$$

Luego

despejando

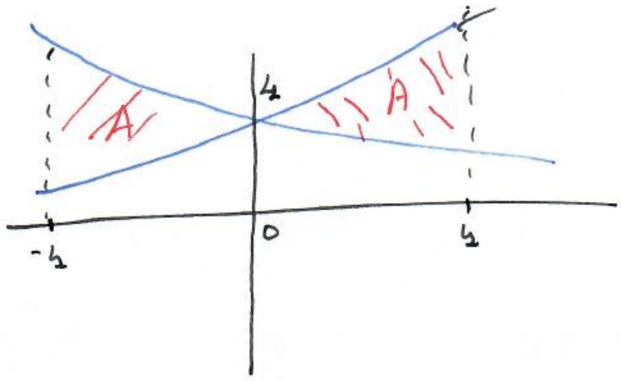
$$\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)\int_{-\infty}^{-\pi} e^{\pi x}\cos 2x\,dx = \frac{e^{-\pi^2}}{\pi}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-\pi} e^{\pi x}\cos 2x\,dx = \frac{\pi e^{-\pi^2}}{\pi^2+4}}$$

PROBLEMA 8: $y = 4e^{3x}$, $y = 4e^{-3x}$

$r = 4$
$s = 3$

$x \in [-4, 4]$



$$A = \int_{-4}^{4} |4e^{3x} - 4e^{-3x}| \, dx =$$

$$= 4\int_{-4}^{0} e^{-3x} - e^{3x} \, dx + 4\int_{0}^{4} \underbrace{e^{3x} - e^{-3x}} \, dx =$$

CAMBIO
$x = -u.$
$dx = -du.$

$$2 \times 4 \int_{-4}^{0} e^{-3x} - e^{3x} \, dx =$$

$$= 8\left[\frac{e^{-3x}}{-3} - \frac{e^{3x}}{3} \Big|_{-4}^{0} \right) =$$

$$= 8\left[-\frac{2}{3} - \left(\frac{e^{12}}{-3} - \frac{e^{-12}}{3} \right) \right]$$

$$= 8\left[\frac{e^{12}}{3} - \frac{(2 + e^{-12})}{3} \right] = \boxed{\frac{8}{3}\left[e^{12} - (2 + e^{-12}) \right]}$$