EXAMEN DE CÁLCULO

Martes 26 de Enero de 2021.

1. Demuestra por inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo natural $n \geq 1$.

2. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

3. Estudia si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

.

4. Sea $f : [0,2] \to [0,2]$ una función continua de modo que $f(0) = f(2)$. Demuestra que existen dos puntos $x, y \in [0,2]$ a los cuáles les pasa que $|x - y| = 1$ y que $f(x) = f(y)$.

5. Representa la gráfica de la siguiente función (calcula extremos relativos y puntos de inflexión, en el caso de que existan; determina el crecimiento y decrecimiento de la función así como su concacivad y convexidad):

$$f(x) = x\sqrt{x-1}.$$

6. Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\, dx.$$

7. Calcula la siguiente integral impropia, si existe:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$$

8. Halla el área del recinto limitado entre las gráficas $y = 2e^{2x}$ e $y = 2e^{-2x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Para el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada ejercicio se resolverá en una cara.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir en los primeros 45 minutos.

Mira detrás las condiciones de la revisión

Revisión del examen:

.- Las notas del examen estarán disponible el día ...4... de Febrero por la tarde (20h).

.- **No será presencial la revisión.**

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-20-21/calculo/examenes/

.- Si un alumno está en desacuerdo con su nota deberá enviar un e-mail al coordinador de la asignatura (Cesar Ruiz e-mail: cruizb@mat.ucm.es), antes de las 16h del día 5 de Febrero, indicando el motivo de su petición (problema o problemas de su desacuerdo).

.- Los profesores correctores del examen se comprometen a contestar (por e-mail) a las peticiones de revisión antes de las 18h del día 8 de Febrero.

No es obligatorio solicitar la revisión.

PROBLEMA 1:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

PROCEDAMOS POR INDUCCIÓN.

SI $n=1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$

POR OTRO LADO $\dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1.$

LA FÓRMULA ES CIERTA PARA $n=1$.

SUPONGAMOS QUE PARA n LA FÓRMULA ES CIERTA.

AHORA PARA $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] = n+1\left[\frac{n(2n+1)+6n+6}{6}\right] =$$

OPERANDO

$$= (n+1)\left[\frac{2n^2+7n+6}{6}\right] = (n+1)\left[\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}$$

LUEGO EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN NOS DICE QUE PARA TODO $n \in \mathbb{N}$ LA FÓRMULA DE ARRIBA ES CIERTA.

PROBLEMA 2:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n\text{ - SUMANDOS}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

SUMANDO MÁS GRANDE

SUMANDO MÁS PEQUEÑO

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

YA QUE $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1$

Y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = 1$

LUEGO $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$

PROBLEMA 3:)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}$$

VAMOS A COMPARAR ESTA SERIE DE TÉRMINOS POSITIVOS CON LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ LA SERIE ARMÓNICA QUE SABEMOS QUE NO CONVERGE. USAREMOS EL CRITERIO DE COMPARACIÓN POR COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\ln n}{n} = 1$$

$$\left(\text{CLARO, EL } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \right)$$

LUEGO LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}$ ES DIVERGENTE.

PROBLEMA 4º) DEFINIMOS LA FUNCIÓN

$$g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow g(x) = f(x+1) - f(x)$$

g ESTÁ BIEN DEFINIDA Y ES CONTINUA EN [0,1] YA QUE g ES LA SUMA DE f. CONTINUA CON f(x+1) QUE ES CONTINUA POR SER COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS

ADEMÁS $g(0) = f(1) - f(0)$

$$g(1) = f(2) - f(1) \underset{\text{POR HIPÓTESIS}}{=} f(0) - f(1)$$

SI $g(0) = 0 \Rightarrow f(1) = f(0)$ Y OBTENEMOS EL RESULTADO

SI $g(0) \neq 0$, ENTONCES $g(0)\,g(1) < 0$ Y POR EL TEOREMA DE BOLZANO EXISTE $c \in (0,1)$ CON $0 = g(c) = f(c+1) - f(c)$ ASÍ $f(c) = f(c+1)$ Y SE VERIFICA LO QUE QUERÍAMOS PROBAR.

PROBLEMA 5: $f(x) = x\sqrt{x-1}$

- $\mathrm{Dom}\, f = [1, \infty)$ SI $x<1$, $x-1<0$ Y ALLÍ NO ESTÁ DEFINIDA LA RAÍZ CUADRADA

- LÍMITES $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

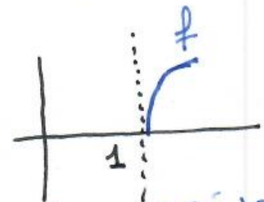
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- OBSERVEMOS QUE $f(x) > 0 \quad \forall x \in (1, \infty)$

- DERIVADA $f'(x) = \sqrt{x-1} + x \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 \quad \forall x > 1$

LUEGO f ES CRECIENTE EN $[1, \infty)$

OBSERVEMOS QUE $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \infty$



LUEGO TENDREMOS QUE

- LA FUNCIÓN NO TIENE PUNTOS CRÍTICOS
- EL MÍNIMO DE LA FUNCIÓN ES $x = 1$, ALLÍ $f(1) = 0$

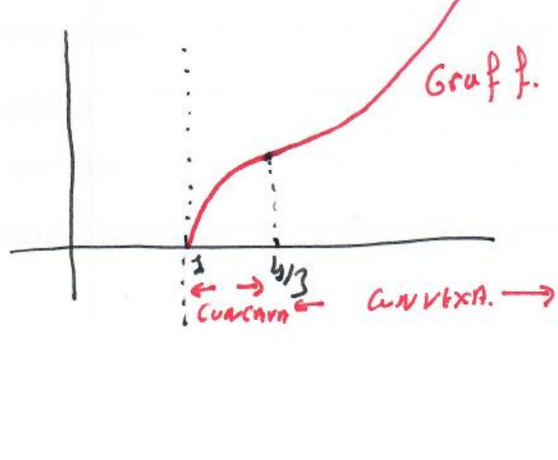
- DERIVADA SEGUNDA $f''(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{x}{2\sqrt{x-1}\,(x-1)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}}\left[1 - \frac{x}{2(x-1)}\right]$$

COMO $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > 0$, Y $1 - \dfrac{x}{2(x-1)} \begin{cases} <0 & \text{SI } x < 4/3 \\ =0 & \text{SI } x = 4/3 \\ >0 & \text{SI } x > 4/3 \end{cases}$

$1 - \dfrac{x}{2(x-1)} = 0 \iff 2x - 2 = x \iff x = \dfrac{4}{3}$

LA FUNCIÓN ES CÓNCAVA EN $[1, 4/3)$ CONVEXA EN $(4/3, \infty)$ Y TIENE UN PUNTO DE INFLEXIÓN EN $x = 4/3$



PROBLEMA 6: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x}}$

NO PARECE QUE SE PUEDA HACER POR PARTES.

SI FUESE $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ SERÍA CASI INMEDIATA.

TAMBIÉN SERÍA INMEDIATA SI FUERA DEL TIPO $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x}$.

ESTO NOS PUEDE INDICAR UN CAMBIO DE VARIABLE DEL TIPO

$$u = \sqrt{1-x}$$

ASÍ $\displaystyle\frac{du}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ ASÍ $du = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\,dx$

Y $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x}} = \int \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)dx$$

$$= \int \frac{-2u}{1+u}\,du =$$

$$= -2\int \frac{u+1}{1+u} - \frac{1}{1+u}\,du =$$

$$= -2\int 1 - \frac{1}{1+u}\,du = -2\left[u - \ln(1+u)\right] =$$

$$= \boxed{-2\sqrt{1-x} + 2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$

SOLUCIÓN

COMPROBACIÓN SI $f(x) = -2\sqrt{1-x} + 2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)$

$$f'(x) = -2\,\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{1+\sqrt{1-x}-1}{1+\sqrt{1-x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}.$$

PROBLEMA 7:

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x}\cos x \, dx} \underset{\text{DEFINICIÓN}}{=} \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-x}\cos x \, dx =$$

PODEMOS RESOLVER LA INTEGRAL $\int_0^r e^{-x}\cos x \, dx$ POR PARTES

$$= \lim_{r\to\infty} \left[-e^{-x}\cos x \Big|_0^r - \int_0^r e^{-x}\operatorname{sen} x \, dx \right] =$$

$$\lim_{r\to\infty} -e^{-r}\cos r = 0$$

$$= 1 - \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-x}\operatorname{sen} x \, dx \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$$= 1 - \lim_{r\to\infty} \left[-e^{-x}\operatorname{sen} x \Big|_0^r + \int_0^r e^{-x}\cos x \, dx \right]$$

$$\lim_{r\to\infty} -e^{-r}\operatorname{sen} r = 0$$

$$= 1 - \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-r}\cos x \, dx = \boxed{1 - \int_0^\infty e^{-x}\cos x \, dx}$$

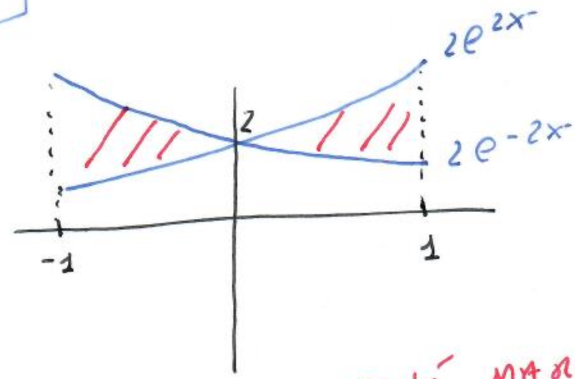
AHORA DESPEJANDO

$$2\int_0^\infty e^{-x}\cos x \, dx = 1$$

LUEGO $\boxed{\int_0^\infty e^{-x}\cos x \, dx = 1/2}$

PROBLEMA 8:

DIBUJAMOS



EL ÁREA "A", A CALCULAR, ESTÁ MARCADA DE ROJO

Y SU ÁREA A ES POR DEFINICIÓN

$$A = \int_{-1}^{1} |2e^{2x} - 2e^{-2x}|\, dx \underset{\downarrow}{=}$$

SEGÚN LA POSICIÓN DE LAS GRÁFICAS

$$= \int_{-1}^{0} 2e^{-2x} - 2e^{2x}\, dx + \int_{0}^{1} 2e^{2x} - 2e^{-2x}\, dx =$$

OBSERVEMOS QUE LA FUNCIÓN $g(x) = |2e^{2x} - 2e^{-2x}| \geq 0$

ES PAR, CLARO

$$g(-x) \underset{\text{DEF. DE } g}{=} |2e^{-2x} - 2e^{2x}| \underset{\text{PROPIEDAD DEL VALOR ABSOLUTO}}{=} |2e^{2x} - 2e^{-2x}| \underset{\text{DEF. DE } g}{=} g(x)$$

$$= 2\int_{0}^{1} 2e^{2x} - 2e^{-2x}\, dx = 4\int_{0}^{1} e^{2x} - e^{-2x}\, dx =$$

$$\underset{\text{REGLA DE BARROW}}{=} 4\left[\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} \Big|_{0}^{1} \right] =$$

$$= 4\left[\frac{e^{2}}{2} + \frac{e^{-2}}{2} - 1 \right] = \boxed{2(e^{2} + e^{-2}) - 4.}$$