ÁLGEBRA LINEAL

OPERACIONES EN $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^n$ podemos definir una serie de operaciones con claro sentido geométrico.

SUMA (de vectores). Dados dos n-uplas $x, y \in \mathbb{R}^n$

1. $x = (x_1, ..., x_n)$
2. $y = (y_1, ..., y_n)$

definimos su suma por

$$\begin{array}{ccccccc} + & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n & & \\ & & (x, y) & \to & x + y & = & (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n). \end{array}$$

Geométricamente se representa por:

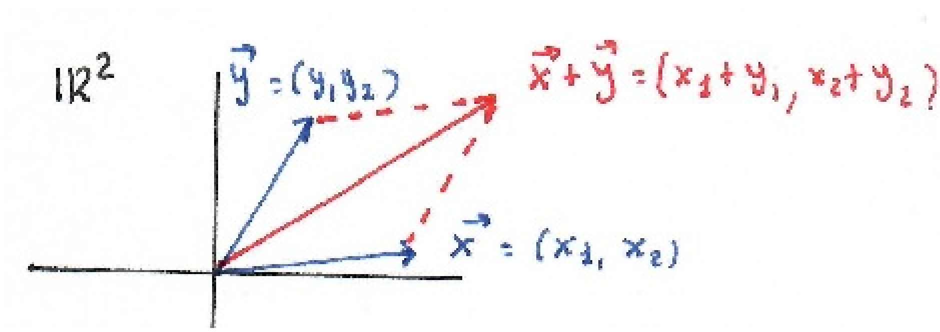

Figura 1. Regla del Paralelogramo.

PROPIEDADES. Esta operación tiene las siguientes propiedades (fáciles de comprobar):

Si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, entonces

- **Conmutativa:** $x + y = y + x$
- **Asociativa:** $x + (y + z) = (x + y) + x$
- **Elemento neutro:** $0 = (0, ..., 0)$ verifica que $x + 0 = 0 + x = x$.
- **Elemento opuesto:** para cada x, si $-x = (-x_1, ..., -x_n)$, entonces $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

PRODUCTO POR ESCALARES. Dados la n-upla $x, \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ definimos su producto por

$$\begin{array}{rcccl} \cdot & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (r, x) & \to & rx = (rx_1, ..., rx_n). \end{array}$$

Geométricamente se representa por:

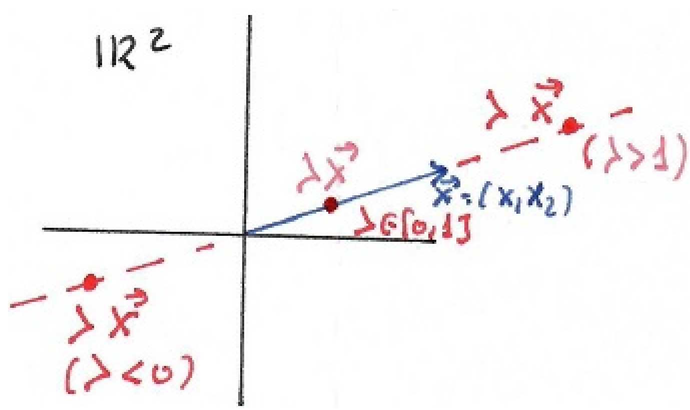

FIGURA 2. Homotecia.

PROPIEDADES. Esta operación tiene las siguientes propiedades (fáciles de comprobar):

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $1, r, s \in \mathbb{R}$, entonces

- $1x = x$
- $r(x + y) = rx + ry$
- $(r + s)x = rx + sx$
- $r(sx) = (rs)x$

Observación 1. *$\mathbb{R}^n$ con la suma y el producto por escalares forma lo que se llama un **Espacio Vectorial**, concepto que se estudiará con detalle en un curso de Álgebra Lineal.*

PRODUCTO ESCALAR. Dadas las n-uplas $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos su producto escalar por

$$\begin{array}{rcccl} <,> & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \to & < x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k. \end{array}$$

Obsevemos que el **resultado** de esta operación es un **número**. Geométricamente:

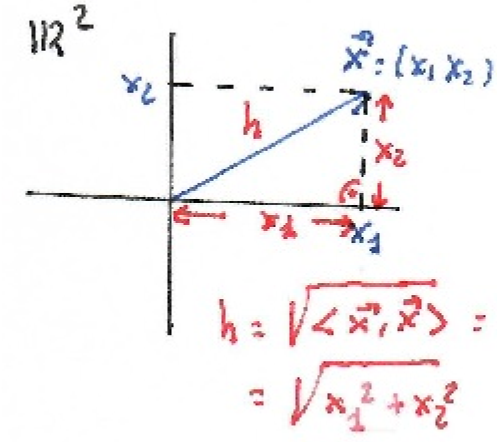

FIGURA 3. Teorema de Pitágoras.

PROPIEDADES. Esta operación tiene las siguientes propiedades (fáciles de comprobar):

Si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

- $< x, x >= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$ y $< x, x >= 0$ si y solo si $x = 0$.
- $< x, y >=< y, x >$
- $< rx, y >= r < x, y >$
- $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$.

Todas estas propiedades son fáciles de probar y se deja como ejercicio.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es