ÁLGEBRA LINEAL

DISTANCIA EN $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}$, conocemos la distancia de un punto $x \in \mathbb{R}$ a cero que es $|x|$. Y la distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ que es $|x-y|$.

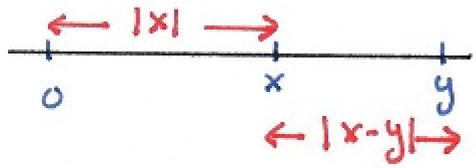

FIGURA 1. Distancias en la recta.

El producto escalar nos permite definir distancias en $\mathbb{R}^n$

Definición 1. *Dadas n-uplas $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define*

- *la* ***distancia*** *de x a 0 por*

$$||x|| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

llamamos a $||x||$ ***módulo*** *de x. El módulo de x no es más que la distancia (euclídea) de x a 0.*

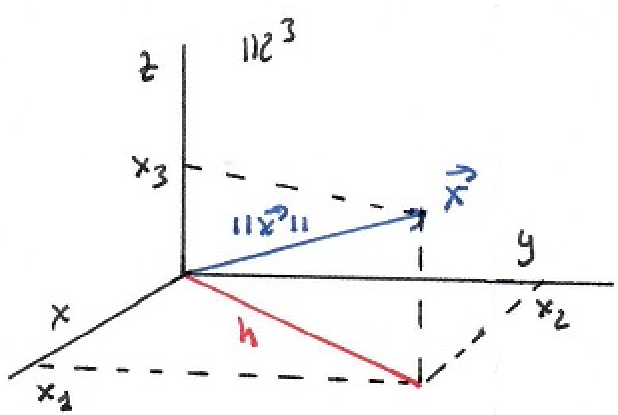

FIGURA 2. Distancia euclídea de x a 0.

- *La distancia entre x e y se define por*

$$||x-y|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} = \sqrt{<x-y, x-y>}.$$

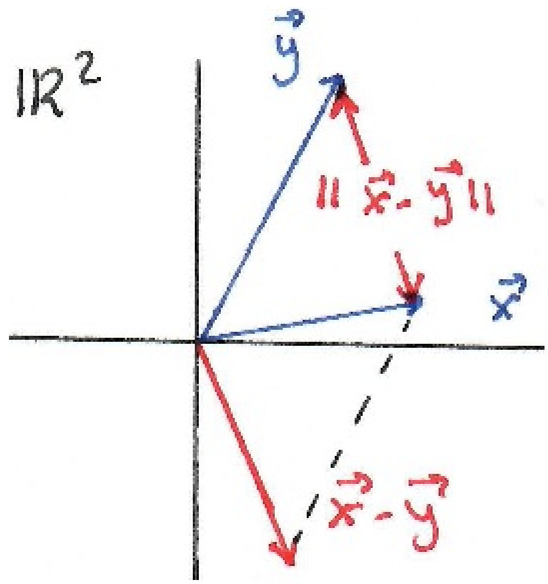

FIGURA 3. Distancias entre dos puntos.

Observemos que de las propiedades del producto escalar

$$< x-y, x-y >=< x, x-y > - < y, x-y >=< x, x > -2 < x, y > + < y.y >=$$
$$||x||^2 - 2 < x, y > +||y||^2.$$

Definición 2. *Se dice que dos* ***vectores*** $x, y \in \mathbb{R}^n$ *son* ***ortogonales*** *si*

$$< x, y >= 0.$$

Si dos vectores son ortogonales, entonces la distancia entre ellos está dada por el **Teorema de Pitágoras** (mira la figura y la observación anterior).

PROPIEDADES DEL MÓDULO Sean $r \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

- $||x|| \geq 0$ y $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- $||rx|| = |r|\,||x||$ ($|r|$ valor absoluto de r).
- **Propiedad Triangular**: $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Estas tres propiedades son análogas a las que tiene el **valor absoluto** de los número reales.

Demostración: Las propiedades primera y segunda son fáciles de ver y se dejan como ejercicio. La Propiedad triangular requiere un poco más de trabajo y necesita del siguiente Lema.

Lema 1. ***(de Cauchy-Schwarz)*** *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||.$$

Demostración: Si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $y = rx$ entonces el resultado se comprueba fácilmente (ejercicio).

En otro caso, $ry - x \neq 0$ para todo r y por tanto, de las propiedades del módulo y del producto escalar se tiene que para todo número real r

$$0 < ||ry - x||^2 =< ry - x, ry - x >= \sum_{k=1}^{n} (ry_k - x_k)^2 =$$

$$r^2 (\sum_{k=1}^{n} y_k^2) - 2r(\sum_{k=1}^{n} y_k x_k) + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 =$$

$$r^2 ||y||^2 - 2r < x, y > + ||x||^2.$$

Esta última expresion la podemos ver como un polinomio de segundo grado en r que no tiene nínguna raíz real. Por tanto su discriminante debe ser negativo

$$4(< x, y >)^2 - 4||x||^2||y||^2 < 0.$$

Ahora, despejando

$$| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y|| \qquad \square$$

Demostración: (de la Propiedad Triangular)

$$||x + y||^2 =< x + y, x + y >=$$

$$< x, x > +2 < x, y > + < y, y >\leq$$

usando el Lema

$$||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2,$$

tomando raíces cuadradas terminamos la prueba $\square$

Observación 1. *En el caso $n = 2$ el módulo de $z = (a, b) = a+bi \in \mathbb{R}^2$ es igual al módulo del correspondiente número complejo z.*

$$|z| = ||(a, b)||.$$

PROPIEDADES DE LA DISTANCIA Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, entonces

- $||x - y|| \geq 0$ y $||x - y|| = 0$ si y solo si $x = y$.
- $||x - y|| = ||y - x||$.
- **Propiedad Triangular**: $||x - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y||$.

Demostración: Las dos primeras son muy sencillas y se dejan como ejercicio.

La Propiedad Triangular sale de la correspondiente del modulo

$$||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| \qquad \square$$

Gráficamente:

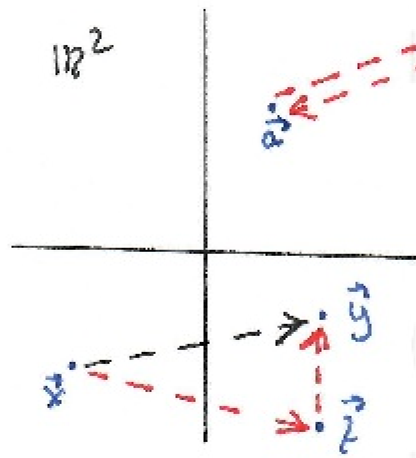

FIGURA 4. Propiedad Conmutativa y Triangular.

APLICACIÓN. La distancia permite definir la proximidad alrededor de un punto. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y sea $r > 0$ definimo el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que distan de a menos que r por

$$B_a(r) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x-a|| < r.$$

Definición 3. *A $B_a(r)$ se le llama* ***bola abierta*** *de centro a y radio r.*

Ejemplos 1. *En los siguientes ejemplos nos salen objetos conocidos:*

Si n=1: $B_a(r) = (a-r, a+r)$; $\qquad B_7(2) = (5,9)$

FIGURA 5. Intervalos abiertos.

Si n=2: $B_a(r)$; $\qquad B_{(1,2)}(1)$

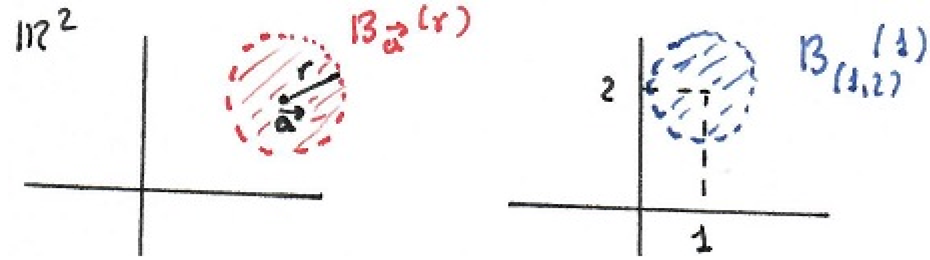

FIGURA 6. Discos sin la circunferencia.

Si n=3: $B_a(r)$; $B_{(0,0,0)}(1)$

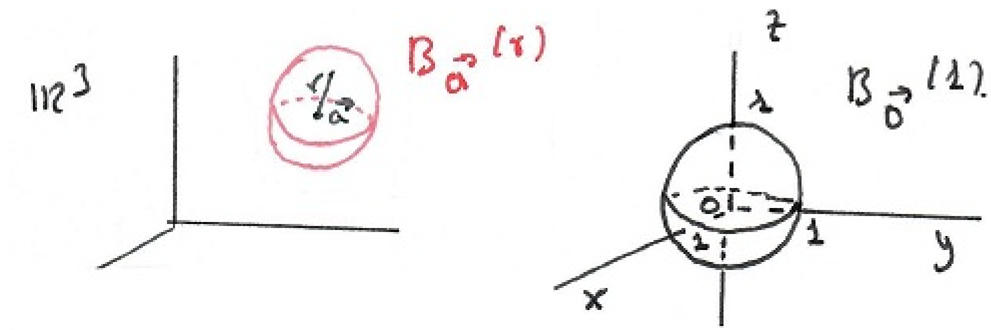

FIGURA 7. Esferas sin el borde.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`