ÁLGEBRA LINEAL

INTRODUCCIÓN.

Conocemos la recta real $\mathbb{R}$.

Figura 1. La recta real $\mathbb{R}$.

También conocemos algo sobre las funciones sobre $\mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pero ello no es suficiente para describir muchos de los fenómenos que se describen en otras ciencias; ni siquiera otros de tipos matemáticos.

Ejemplo 1.

- *La difusión del calor en un volumen.*

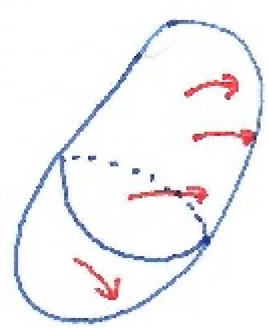

Figura 2. Difusión del calor. O también fuerzas electromagnéticas.

- *Las fuerzas electromagnéticas actuando sobre los puntos de un volumen.*
- *La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tine solución en $\mathbb{R}$; no existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = -1$.*

A partir de $\mathbb{R}$ se pueden definir nuevos conceptos que permitirán modelizar y comprender los problemas que se plantean en los ejemplos anteriores y otros muchos más. Así:

- **El plano** se define como

$$\mathbb{R}^2 = \{\, (a,b) \ : \ a,b \in \mathbb{R}\,\}.$$

Con esta definición definiremos

$$i = (0,1)$$

y veremos que $i^2 = -1 = (-1,0)$. Encontrando por tanto una solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

- **El espacio** se define como

$$\mathbb{R}^3 = \{\, (a,b,c) \ : \ a,b,c \in \mathbb{R}\,\}.$$

- Una aplicación $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

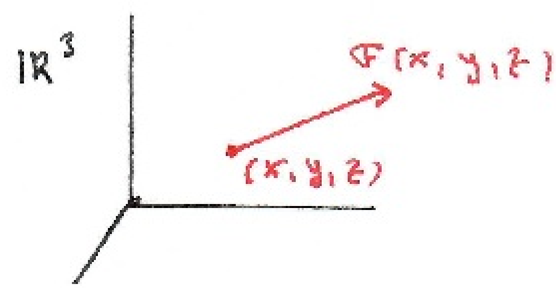

FIGURA 3. F, representación de un campo de fuerzas.

se podrá interpretar como una fuerza F que se ejerce sobre el punto del espacio (x,y,z).

Loe elementos de $\mathbb{R}^n$, $\ n = 2,3,4,.........$, no son números como en el caso de los elementos de $\mathbb{R}$. Salvo el caso especial $n = 2$, donde en $\mathbb{R}^2$ se puede definir un producto como veremos al estudiar **los números complejos**. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ son **vectores**. Tendremos que estudiar los conjuntos de vectores y sus propiedades. Este es el entorno que se conoce como él de los **Espacios Vectoriales**.

Las funciones que se definen entre espacios vectoriales pueden ser muy complejas. Pensemos en algo del tipo

$$\begin{array}{ccccc} F & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \to & F(x,y,z) = (x^2 - y, \operatorname{sen}(xy), \frac{1-\arctan z}{x^2+z^2-1}). \end{array}$$

Las más sencillas son las llamadas **Aplicaciones Lineales** que son las que vamos a estudiar. En otros cursos avanzados se ve como las aplicaciones lineales aproximan a las funciones en general, como lo hace la recta tangente (función lineal) a la gráfica de la curva de la cual es tangente.

Para el estudio de los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales es fundamental la **notación matricial**. Por ellos vamos a estudiar las **Matrices** y sus propiedades.

La solución de todos los problemas "lineales", ya sean sobre espacios vectoriales, aplicaciones lineales o matrices, necesitan plantear y resolver **Sistemas Lineales de Ecuaciones**. Son precisamente los sistemas lineales el comienzo típico de un curso de Álgebra Lineal.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`