ÁLGEBRA LINEAL

Transformaciones Elementales.

En el método de Gauss transformabamos un sistemas líneal, intercambiando ecuaciones, multiplicando una ecuación por un escalar y sumando a una ecuación otra multiplicada por un escalar. Vamos a ver como podemos hacer estas mismas transformaciones con respecto a las filas de una matriz. Y lo vamos a hacer multiplicando por un tipo especial de matrices llamadas **transformaciones elementales**.

Ejemplo 1. *Consideramos la matriz* $P_{r,s} = (p_{i,j})$, *donde*

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad i=j \quad con\ i \neq r\ y \quad i \neq s \\ 0 & si \quad i=j=r \quad y \quad i=j=s \\ 1 & si \quad i=r \quad y \quad j=s \\ 1 & si \quad i=s \quad y \quad j=r \\ 0 & \quad en\ otro\ caso \end{cases}.$$

Propiedades de $P_{r,s}$: observamos que

I_1

$$P_{r,s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0_{r,r} & & \cdots & & 1_{r,s} & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1_{s,r} & & \cdots & & 0_{s,s} & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & \cdots & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_2 Si $P_{r,s} \in M_n$ y A es cualquier otra matriz cuadrada de orden n, entonces el producto con $P_{r,s}A$ es la matriz igual a A salvo que las filas r y s se han intercambiado.

Demostración: Si $P_{r,s}A = (c_{i,j})$, entonces

$$c_{r,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{r,k}a_{k,j} = p_{r,s}a_{s,j} = a_{s,j} \qquad \text{para} \qquad j = i, 2, ..., n$$

y

$$c_{s,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{s,k}a_{k,j} = p_{s,r}a_{r,j} = a_{r,j} \qquad \text{para} \qquad j = i, 2, ..., n \qquad \square$$

I_3 La matriz $P_{r,s}$ es invertible y su inversa es $P_{s,r} = P_{r,s}$ ella misma. ***Demostración:*** Usando lo anterior, si en $P_{r,s}$ intercambiamos las filas r y s lo que nos queda es la identidad

$$P_{r,s}P_{r,s} = I \qquad \square$$

Observación 1. *Una matriz $P_{r,s}$ es una matriz simétrica ya que coincide con su transpuesta (concepto que veremos un poco más adelante). También es una matriz ortogonal ya que coincide con su inversa (más adelante también definiremos esta característica de algunas matrices).*

Ejemplo 2. *Consideramos la matriz $Q_r(\lambda) = (q_{i,j})$, donde*

$$q_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \neq r \\ \lambda & si \quad i = j = r \\ 0 & \quad en\ otro\ caso \end{cases} .$$

Propiedades de $Q_r(\lambda)$: observamos que

II_1

$$Q_r(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \vdots & & & \lambda_{r,r} & & & \vdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

II_2 Si $Q_r(\lambda) \in M_n$ y A es cualquier otra matriz cuadrada de orden n, entonces el con producto $Q_r(\lambda)A$ es la matriz igual a A salvo que las filas r ha sido multiplicada por λ (cada entrada de la fila r queda multiplicada por λ).

Demostración: Si $Q_r(\lambda)A = (c_{i,j})$, entonces

$$c_{r,j} = \sum_{k=1}^{n} q_{r,k}a_{k,j} = q_{r,r}a_{r,j} = \lambda a_{r,j} \qquad \text{para} \qquad j = i, 2, ..., n \qquad \square$$

II_3 La matriz $Q_r(\lambda)$, si $\lambda \neq 0$, es invertible y su inversa es $Q_r = (1/\lambda)$. ***Demostración:*** Usando la propiedad anterior

$$Q_r(\lambda)Q_r(1/\lambda) = Q_r(1/\lambda)Q_r(\lambda) = I \qquad \square$$

Ejemplo 3. *Consideramos la matriz $Q_{r,s}(\lambda) = (q_{i,j})$, donde*

$$q_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \lambda & si \quad i = r\ y\ j = s \\ 0 & \quad en\ otro\ caso \end{cases} .$$

Observemos que $Q_{r,r}(\lambda) = Q_r(\lambda)$.

Propiedades de $Q_{r,s}(\lambda)$: observamos que

III_1

$$Q_{r,s}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & \cdots & \lambda_{r,s} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III_2 Si $Q_{r,s}(\lambda) \in M_n$ y A es cualquier otra matriz cuadrada de orden n, entonces el producto con $Q_{r,s}(\lambda)A$ es la matriz igual a A salvo que la fila r es ahora la suma de la fila r de A con la fila s de A multiplicada por λ

Demostración: Si $Q_{r,s}(\lambda)A = (c_{i,j})$, entonces

$$c_{r,j} = \sum_{k=1}^{n} q_{r,k} a_{k,j} = q_{r,r} a_{r,j} + q_{r,s} a_{s,j} = a_{r,j} + \lambda a_{s,j} \qquad \text{para} \qquad j = i, 2, ..., n \qquad \square$$

III_3 La matriz $Q_{r,s}(\lambda)$, si $r \neq s$, es invertible y su inversa es $Q_{r,s} = (-\lambda)$. ***Demostración:*** Usando la propiedad anterior

$$Q_{r,s}(\lambda) Q_{r,s}(-\lambda) = Q_{r,s}(-\lambda) Q_{r,s}(\lambda) = I \qquad \square$$

Con estas tranformaciones, podemos tratar de tomar una matriz A y tanformarla hasta llegar a matriz identidad. Si esto es posible, usando el Teorema de la lección anterior, vemos que la matriz A es invertible.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es