ÁLGEBRA LINEAL

Rango de una Matriz.

Consideramos una matriz $A \in M_{n \times m}$, una matriz con n filas y m columnas. Por comodidad supondremos que

$$n \leq m.$$

En el caso de sistemas de ecuaciones lineales, esto quiere decir que tenemos al menos tantas incógnitas como ecuaciones, que es lo habitual. De hecho, tener más ecuaciones que incógnitas no nos aporta más información como veremos más adelante.

Definición 1. Sea $A = (a_{i,j}) \in M_{n,m}$.

- a) Si $n = m$, A es una matriz cuadrada, se dice que es **Triangular Superior** si las entradas de la matriz por **debajo de la diagonal** son todas nulas, es decir si

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{para toda} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{y} \quad j < i.$$

- b) Si $n = m$, A es una matriz cuadrada, se dice que es **Triangular Inferior** si las entradas de la matriz por **encima de la diagonal** son todas nulas, es decir si

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{para toda} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{y} \quad j > i.$$

- c) Sea $A \in M_{n \times m}$. Se dice que la matriz A es **Escalonada** si para todo $i = 1, 2, \dots, n$ donde $a_{i,j_i} \neq 0$ es la primera entrada de la fila no nula (empezando por la izquierda, por $a_{1,1}$), se verifica que

$$a_{k,j} = 0 \quad \text{para todo} \quad k > i \quad \text{y} \quad j \leq j_i.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{i,j_i} & \\ \hline \text{ceros} & & & & \end{array} \right)$$

A la entrada $a_{i,j_i} \neq 0$, anterior, se le llama **Pivote** de la fila i .

Ejemplos 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior Matriz escalonada Matriz triangular inferior

Observación 1. Las matrices triangulares superiores son un caso particular de matrices escalonadas.

Rango de una Matriz por Filas.

Dada una matriz $A \in M_{n \times m}$, vamos a transformarla usando las transformaciones elementales (el Método de Gauss) hasta llegar a otra matriz "equivalente" triangular superior o escalonada.

Ejemplo 1. Queremos escalonar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & F_1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & F_2 \\ 4 & 2 & -2 & 0 & F_3 \end{pmatrix}$$

Demostración:

1.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & F_1 = F_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & F_2 = F_1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 & F_3 \end{array}$$

Si es necesario, cambiar el orden de las filas para que la primera fila (F_1) tenga la primera entrada (de la primera columna no toda de ceros) no nula.

2.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & F_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & F_2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & F_3 = F_3 - 2F_1 \end{array}$$

Si $a_{k,1} \neq 0$ para $k = 2, 3, \dots, n$, multiplicar la primera fila por $\frac{-a_{k,1}}{a_{1,1}}$ y sumarla a la k -ésima fila ($F_k + \frac{-a_{k,1}}{a_{1,1}}F_1$) con esto desaparecen todos los coeficientes $a_{k,1}$, para $k > 1$.

3.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & F_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & F_2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & F_3 \end{array}$$

si quitamos F_1 y C_1

Quitamos la primera fila y columna nos queda una matriz de $n - 1$ filas y $m - 1$ columnas. Si $n - 1 > 1$ repetimos los pasos 1. y 2. En otro caso parar. Hemos llegado a la matriz escalonada.

4.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & F_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & F_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_3 = F_3 + 2F_2 \end{array}$$

Llegamos a la matriz escalonada. Contamos las filas nulas. $\square$

En este caso, hay dos filas no nulas $\square$

Definición 2. Dada una matriz $A \in M_{n \times m}$, la transformamos en una matriz triangular superior o escalonada (siguiendo el método de Gauss). La matriz resultante tendrá un número de filas cuyas entradas no son todas nulas. A ese número (de filas) lo llamamos **rango por filas** de la matriz.

Observación 2. a lo largo del curso probaremos que el rango de una matriz es independiente de como hayamos aplicado el método de Gauss para llevarla a su forma escalonada.

- Veremos que si $n \in M_{n \times n}$, entonces A es invertible si y solo si su rango es n .
- Veremos que el rango de A es igual al número de filas (o columna) que, como vectores, son linealmente independientes (concepto este de la independencia que veremos en el siguiente capítulo).
- Veremos que si $Ax = b$ es un sistema $n \times m$, entonces el sistema es compatible si y solo si el rango de A es igual al rango de la matriz ampliada $(A|b)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \quad y \quad (A|b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & b_n \end{pmatrix}$$

Estremando un poco el método de Gauss, definimos:

Definición 3. Dada una matriz $A \in M_n$, si le aplicamos el método de Gauss-Jordan de modo que la matriz triangular resultante tenga todas las entradas de las columnas correspondientes a los pivotes nulas, salvo los pivotes que son 1, a esta matriz le llamamos **Forma Normal de Hermite**.

Ejemplo 2. Queremos llegar a la forma normal de Hermite de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -0 \end{pmatrix}$$

Demostración:

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{array}{l} \text{Por Gauss,} \\ \text{triangularizamos} \\ \text{la matriz.} \end{array}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{array}{l} \text{Si } a_{i,j_i} \text{ es el pivote de la fila } i \\ \text{multiplicamos la fila } i \text{ por } \frac{1}{a_{i,j_i}}. \\ \text{En este caso, el rango de } A \\ \text{es dos.} \end{array}$$

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right)$$

Por Gauss, anulamos
las entradas por encima
de cada pivote.

Llegamos a la
Forma Normal de Hermite de A $\square$

Definición 4. Dada una matriz $A \in M_{n \times m}$, si le aplicamos el método de Gauss-Jordan de modo que la matriz escalonada resultante tenga todas las entradas de las columnas correspondientes a los pivotes nulas, salvo los pivotes que son 1, a esta matriz le llamamos **Forma Normal de Hermite**.

Ejemplo 3. Queremos llegar a la forma normal de Hermite de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración:

- Anulamos las entradas debajo de $a_{1,1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Cambiamos de orden las filas, y llegamos a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos las filas para que los pivotes se conviertan en "unos"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Por Gauss, hacemos "ceros" por encima de los pivotes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La última matriz es la forma normal de Hermite de la matriz A. Lo cuál nos deja ver que el rango de la matriz es tres $\square$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FA-
CULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`