ÁLGEBRA LINEAL

Diferentes Tipos de Matrices.

Definición 1. *(**Transposición**). Dada una matriz $A = (a_{i,j}) \in M_{n\times m}$, se llama **matriz transpuesta** de A a la matriz*

$$A^T = (b_{j,i}) \in M_{m\times n}$$

donde

$$b_{j,i} = a_{j,i} \qquad \textit{para todo} \qquad j = 1,2,...,m, \;\; i = 1,2,....,n.$$

Ejemplos 1.

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \pi & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$
- $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

La transposición tiene algunas propiedades.

Proposición 1. *Para cualquier elección de matrices $A, B \in M_{n\times m}$, $C \in M_{m\times ñ}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica que:*

a) $(A^T)^T = A.$
b) $(A+B)^T = A^T + B^T.$
c) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
d) $(AC)^T = C^T A^T$

Demostración: Las partes **a), b)** y **c)** quedan como sencillos ejercicios.

d) Sean $A = (a_{i,j}) \begin{array}{lcl} i & = & 1,2,...,n \\ j & = & 1,2,...,m \end{array}$ y $C = (c_{j,k}) \begin{array}{lcl} j & = & 1,2,...,m \\ k & = & 1,2,...,ñ \end{array}$,

luego

$A^T = (d_{j,i}) = (a_{i,j}) \begin{array}{lcl} j & = & 1,2,...,m \\ i & = & 1,2,...,n \end{array}$ y $C^T = (e_{k,j}) = (c_{j,k}) \begin{array}{lcl} k & = & 1,2,...,ñ \\ j & = & 1,2,...,m \end{array}$,

$$A.C = (b_{i,k}) \begin{array}{lcl} i & = & 1,2,...,n \\ k & = & 1,2,...,ñ \end{array}$$

donde
$$b_{i,k} = \sum_{j=i}^{m} a_{i,j} c_{j,k} = \sum_{j=1}^{m} e_{k,j} d_{j,i}.$$
Así $(AC)^T = (f_{k,i}) = (b_{i,k}) = C^T A^T$ $\square$

Definición 2. A) *Una matriz cuadrada A se llama* ***simétrica*** *si $A^T = A$.*

B) *Una matriz cuadrada A se llama* ***antisimétrica*** *si $A^T = -A$.*

C) *Una matriz cuadrada A se llama* ***ortogonal*** *si $AA^T = I$, es decir si*
$$A^{-1} = A^T.$$

D) *Una matriz cuadrada A se llama* ***regular*** *si existe A^{-1}.*

Observación 1. *Veremos mas adelante que el qué $A \in M_n$ sea regular es equivalente a que el rango de A sea n o también a que su determinate $|A| \neq 0$.*

Ejemplos 2.

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *es una matriz simétrica.*
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *es una matriz antisimétrica.*
- $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *es una matriz ortogonal.*

Demostración: $AA^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ya que* $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ $\square$

Considerando la matriz A del último ejemplo y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces el producto
$$Ax = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta \\ x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix} = (x_1 + x_2 i)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$
donde el último producto es un producto de números complejos. Con lo que sabemos de complejos, el producto de la matriz A con x lo que hace es girar un ángulo θ (en el sentido contrario a las agujas del reloj) el vector del plano x.

Respecto de las nuevas definiciones tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 2. *Sea A una matriz cuadrada, entonces*

a)
$$A + A^T$$
es una matriz simétrica.

b)
$$A - A^T$$
es una matriz antisimétrica.

c) *A se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.*

Demostración: Sean $A = (a_{i,j})$ y $A^T = (b_{i,j}) = (a_{j,i})$.
a) Sea $A + A^T = (c_{i,j})$, donde

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} = a_{i,j} + a_{j,i} =$$
$$a_{j,i} + a_{i,j} = a_{j,i} + b_{j,i} = c_{j,i}.$$

Luego la matriz $A + A^T$ es simétrica.
b) Sea $A - A^T = (c_{i,j})$, donde

$$c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} = a_{i,j} - a_{j,i} =$$
$$-(a_{j,i} - a_{i,j}) = -(a_{j,i} - b_{j,i} = -c_{j,i}.$$

Luego la matriz $A + A^T$ es antisimétrica.
c) Se deja como ejercicio □

Proposición 3. *Sean A y B matrices cuadradas **regulares**, entonces*

a) *La inversa de A, que sabemos que existe, es única.*
b) $(A^1)^{-1} = A$.
c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
d) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Demostración: **a)** y **c)** ya las probamos. **b)** es muy fácil (ejercicio).
d) Observemos que
$$(AA^{-1})^T = I^T = I.$$
De las propopiedades de la transposición junto con lo anterior se sigue que
$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I,$$
luego de aquí se deduce que
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`