ÁLGEBRA LINEAL

Propiedades de los Sistemas Lineales.

Dado un sistema lineal de n ecuaciones y m incógnitas (1) ¿cómo lo resolvemos?

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n, \end{array} \right.
$$

Si el sistema fuese de forma **Triangular**, es decir de la forma

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} c_{1,1}x_1 & +c_{1,2}x_2+ & \cdots & & +c_{1,m}x_m & = & b_1 \\ & c_{2,2}x_2+ & \cdots & & +c_{2,m}x_m & = & b_2 \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ & & c_{k,k}x_k+ & & \cdots + c_{k,m}x_m & = & b_k \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & c_{n,m}x_m & = & b_n, \end{array} \right.
$$

Este sistema triangular es fácil de resolver, ya que desejando en la última ecuación

$$x_m = \frac{b_n}{c_{n,m}}.$$

Ahora la penúltima ecuación

$$c_{n-1,m-1}x_{m-1} + c_{n-1,m}x_m = c_{n-1,m-1}x_{m-1} + c_{n-1,m}\frac{b_n}{c_{n,m}} = b_{n-1}$$

y despejando

$$x_{m-1} = \frac{1}{c_{n-1,m-1}}(b_{n-1} - c_{n-1,m}\frac{b_n}{c_{n,m}}).$$

Y así subiendo hacia atrás vamos encontrando los distinto valores de x_j con $j = 1, 2, .., m$ (Observemos que lo anterior tiene perfecto sentido si $n = m$, en otro caso ya veremos que pasa).

Ejemplo 1.

$$
\begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & - & z & = & 2 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}
$$

Demostración: Despejando en la última ecuación $z = 2$. Ahora la segunda ecuación queda $2y - 2 = 2$ y despejando $y = 2$. Sustituyendo en la primera ecuación los valores de z e y, tenemos que $3x + 2 + 2 = 1$. Despejando $x = -1$. Una solucún única. $\square$

Ejemplo 2.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Demostración: Despejando en la segunda ecuación $y = \frac{2+z}{2}$. Ahora la primera ecuación queda $3x + \frac{2+z}{2} + z = 1$. Despejando $x = \frac{1}{3}(1 - \frac{2+3z}{2})$, para todo $z \in \mathbb{R}$. Tenemos infinitas soluciones $\square$

El **Método de Eliminación de Gauss** consiste en pasar de un sistema cualquiera (1) a otro **triangular** de tipo (2) que tenga las mismas soluciones que el primero.

Para poder hacer tal transformación necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea un sistema lineal de n ecuaciones lineales y m incógnitas,*

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n, \end{array}$$

y S el conjunto de las soluciones del sistema. Entonces

1. *si imtercambiamos el orden de dos ecuaciones del sistema lineal, el sistema resultante tiene las mismas soluciones que el primero.*
2. *Si a una ecuación la "multiplicamos por un escalar", el sistema resultante tiene las mismas soluciones que el primero.*
3. *Si a cualquier ecuación del sistema "la sumamos" otra ecuación "multiplicada" por un escalar, el sistema resultante tiene las mismas soluciones que el primero.*

En la prueba se ve de forma clara que significa "multiplicamos por un escalar" a una ecuación y lo que es la "suma " de dos ecuaciones.

Demostración: Parece claro que si $x_1, x_2, ..., x_m$ es una solución del problema

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 + ... + a_{3,m}x_m & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array} \quad \text{también lo es de} \quad \begin{array}{rcl} a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{3,1}x_1 + ... + a_{3,m}x_m & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}$$

Observemos que intercambiar las ecuaciones una y dos o las ecuaciones i y k cualesquiera produce el mismo efecto.

Por otro lado si $x_1, x_2, ..., x_m$ verifican que

$$a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,m}x_m = b_i,$$

entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ también es cierto que

$$\lambda(a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,m}x_m) = \lambda a_{i,1}x_1 + ... + \lambda a_{i,m}x_m = \lambda b_i$$

independientemente de que ecuación i hallamos tomado.

Por último si $x_1, x_2, ..., x_m$ es una solución del problema

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,m}x_m & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{cases}$$

y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces también es cierto que

$$\lambda a_{1,1}x_1 + ... + \lambda a_{1,m}x_m = \lambda b_1$$

y por tanto que para estos $x_1, x_2, ..., x_m$ se verifica también que

$$(**) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,m}x_m + \lambda(a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m) & = & b_i + \lambda b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$(**) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{i,1} + \lambda a_{1,1})x_1 + ... + (a_{i,m} + \lambda a_{1,m})x_m & = & (b_i + \lambda b_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{cases}$$

Observemos que si en lugar de sumar la ecuación 1 hubiesemos sumado cualquier otra el resultado no cambia.

Al contrario, si $y_1, y_2, ..., y_m$ es una solución del sistema $(**)$, entonces en particular

$$a_{1,1}y_1 + ... + a_{1,m}y_m = b_1$$

y así también es cierto que

$$\lambda a_{1,1}y_1 + ... + \lambda a_{1,m}y_m = \lambda b_1$$

y como

$$(a_{i,1} + \lambda a_{1,1})y_1 + ... + (a_{i,m} + \lambda a_{1,m})y_m = (b_i + \lambda b_1)$$

se deduce que

$$a_{i,1}y_1 + ... + a_{i,m}y_m = b_i,$$

luego $y_1, y_2, ..., y_m$ es una solución del sistema $(*)$ $\square$

Ejercicio 1. *Dado un sistema de ecuaciones lineales homogéneo:*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & 0, \end{cases}$$

y sea S el conjunto de sus soluciones. Se tiene que

A) $0 = (0, 0, ..., 0) \in S$.

B) *Si* $x = (x_1, x_2, ...x_m), y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in S$, *entonces* $x + y \in S$.

C) *Si* $x \in S$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lambda x \in S$

Ejercicio 2. *Sea un sistema de ecuaciones lineales*

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & b_n, \end{cases}$$

y sea el sistema homogéneo asociado al anterior

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m & = & 0, \end{cases}$$

Sea S es conjunto de soluciones del sistema homogéneo S y llamemos S' al conjunto de soluciones del sistema (1). *Prueba que*

a) *si* $x, y \in S'$ *entonces* $y - x \in S$.

b) *Si* $x \in S$ *e* $y \in S'$, *entonces* $x + y \in S'$.

c) *Si* y *es una* ***solución particular*** *del sistema* (1), *entonces*

$$S' = \{\, y + x \quad : \quad x \in S \,\}.$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`