ÁLGEBRA PRÁCTICA-1

Nombre y apellidos...

1.- Sea z un número complejo de módulo 1. Prueba que $z + z^{-1}$ es un número real.

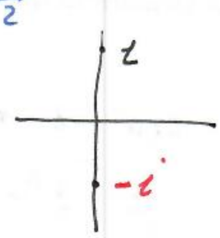
$z \cdot z^{-1} = 1$ así $\bar{z} \cdot z \cdot z^{-1} = \bar{z}$ como $\bar{z} \cdot z = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$

Luego $z + z^{-1} = z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$.

2.- Calcula $\sqrt[3]{-8i} = 2\sqrt[3]{-i} = 2\sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}}$

ya que $|-i| = 1$

y $\operatorname{Arg} -i = \frac{3\pi}{2}$



En forma polar $-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$

Ahora aplicando la fórmula del cálculo de raíces de un número complejo, en este caso $-i$

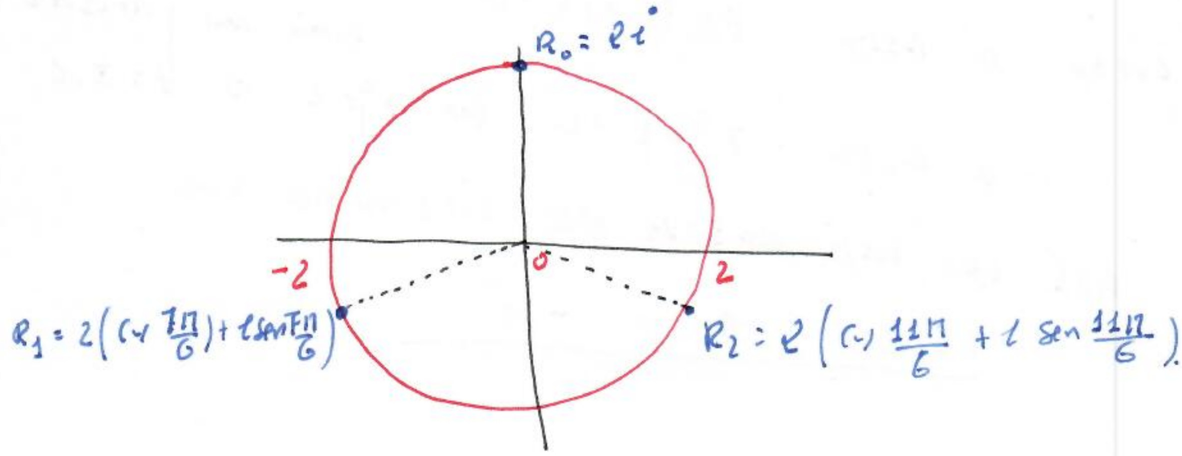
$$r_0 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}/3 + 0\,\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\left(\frac{3\pi}{2}\right)/3 + 0\,\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= i$$

$$r_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$r_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{2\pi}{3}\right)$$

y las soluciones son



3.-

3_1.- Prueba que para todo número natural n, el polinomio $z-1$ divide al polinomio $z^n - 1$.(**Indicación:** divide un polinomio por el otro y fijate en el cociente).

$$\begin{array}{l|l} z^n \quad -1 & z-1 \\ \hline -z^n + z^{n-1} & z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 \\ \quad z^{n-1} - 1 & \\ \quad -z^{n-1} + z^{n-2} & \\ \quad\quad z^{n-2} - 1 & \\ \quad\quad\quad \ddots\ z - 1 & \\ \quad\quad\quad -z + 1 & \\ \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

ASÍ $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$

3_2.- Demuestra que las n raíces de la unidad distintas de 1 son soluciones de la ecuación

$$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + x^2 + x + 1 = 0.$$

SEA z TAL QUE $z^n = 1 \iff z^n - 1 = 0$; SI ADEMÁS $z \neq 1$

$0 = z^n - 1 \overset{3_1}{=} (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$ COMO $z \neq 1$.

TIENE QUE OCURRIR QUE $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$.

4.- Encuentra las soluciones de la ecuación $z^3 - (1-2i)z^2 - z + (1-2i) = 0$, si se sabe que $(1-2i)$ es una solución de la misma.

COMPROBACIÓN $z^3 - (1-2i)z^2 - z + (1-2i) =$

$= z^2(z - (1-2i)) - z + (1-2i) =$

$= (z^2 - 1)(z - (1-2i))$.

LUEGO SI $z = (1-2i) \iff z - (1-2i) = 0$ y

$1-2i$ ANULA EL POLINOMIO.

POR OTRO LADO

$0 = z^3 - (1-2i)z^2 - z + (1-2i) =$

$= (z^2 - 1)(z - (1-2i))$

LUEGO O BIEN $z - (1-2i) = 0 \Rightarrow z = (1-2i)$ RAÍZ COMO NOS DECÍAN

O BIEN $z^2 - 1 = 0 \iff z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

ASÍ LAS TRES RAÍCES DEL POLINOMIO SON

$(1-2i)$, 1 y -1