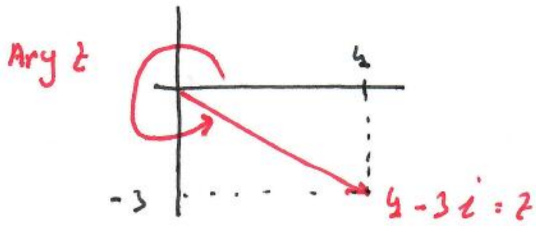
HOJA 1:

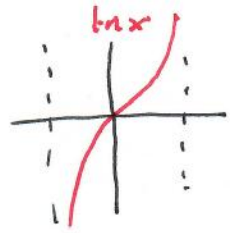
PROBLEMA 1:) MÓDULO Y ARGUMENTO DE $4-3i$



$$|4-3i| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathrm{Arg}(4-3i) = \mathrm{Arctg}\,\frac{-3}{4} < 0$$

OBSERVACIÓN



$$\mathrm{Arg}(4-3i) = 2\pi + \mathrm{Arctg}\,\frac{-3}{4}.$$

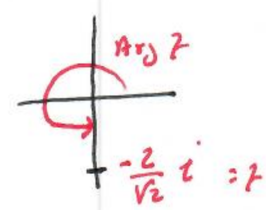
MÓDULO Y ARGUMENTO DE $\frac{1-i}{1+i}$.

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-1-2i}{|1+i|^2} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\,i$$

$\overline{1+i} = 1-i$

LUEGO $\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \left|-\frac{2}{\sqrt{2}}\,i\right| = \frac{2}{\sqrt{2}}\,|i| = \frac{2}{\sqrt{2}}$

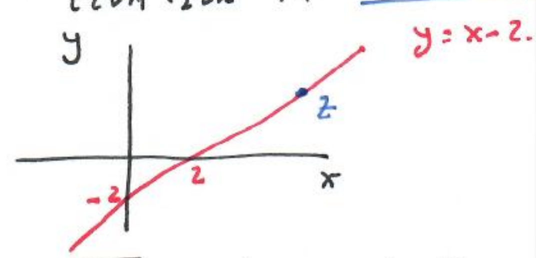
$$\mathrm{Arg}\,\frac{1-i}{1+i} = \mathrm{Arg}\,-\frac{2}{\sqrt{2}}\,i = \frac{3\pi}{2}$$



PROBLEMA 2:) a) $\mathrm{Re}\,z - \mathrm{Im}\,z = 2$

Si $z = x + iy$ $\quad \mathrm{Re}\,z - \mathrm{Im}\,z = x - y = 2$

LUEGO $y = x-2$ ECUACIÓN DE UNA RECTA



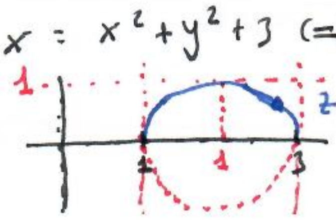
b) $\mathrm{Re}\,\frac{z-1}{z-3} = \mathrm{Re}\,\frac{(z-1)(\overline{z-3})}{(z-3)(\overline{z-3})} = \frac{1}{|z-3|^2}\,\mathrm{Re}\left(z\cdot\bar{z} - 3z - \bar{z} + 3\right) =$

$= \frac{1}{|z-3|}\left(|z|^2 - 4\,\mathrm{Re}\,z + 3\right)$ IGUALANDO A CERO

$4\,\mathrm{Re}\,z = |z|^2 + 3 \underset{z=x+iy}{\iff} 4x = x^2+y^2+3 \iff y^2 = -x^2+4x-3 =$

$= -(x-1)(x-3)$

LUEGO $y = \pm\sqrt{-(x-1)(x-3)}$



HOJA 1:

PROBLEMA 2: c) $\left| \dfrac{z-3}{z+3} \right| = 2$

$\Longleftrightarrow \quad |z-3| = 2|z+3| \quad \Rightarrow \quad |z-3|^2 = 4|z+3|^2$

$\Longleftrightarrow \quad (x-3)^2 + y^2 = 4(x+3)^2 + 4y^2$

$z = x+iy$

Así $\quad y^2 = \dfrac{(x-3)^2}{3} - \dfrac{4(x+3)^2}{3}$

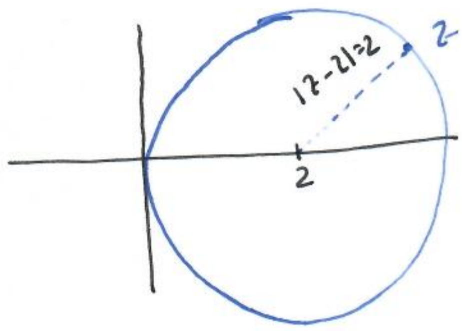
$y = \pm \sqrt{\dfrac{(x-3)^2}{3} - \frac{4}{3}(x+3)^2}$

Solo queda dibujar esta gráfica

d) $|z+2| = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad |z-(-2+0i)| = 2$ exactamente 2

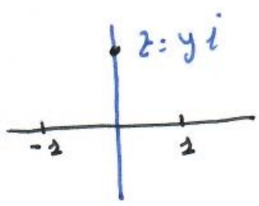
Los puntos z que distan de -2

Circunferencia de centro 2 y radio 2.



e) $|z-1| = |z+1|$ son los puntos que equidistan de -1 y 1

comprobamos que $\{z : \operatorname{Re} z = 0\}$ es el conjunto buscado



f) $\bar{z} = z^{-1}$ si $z = x+yi$, $\bar{z} = x-yi$ $\quad z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$

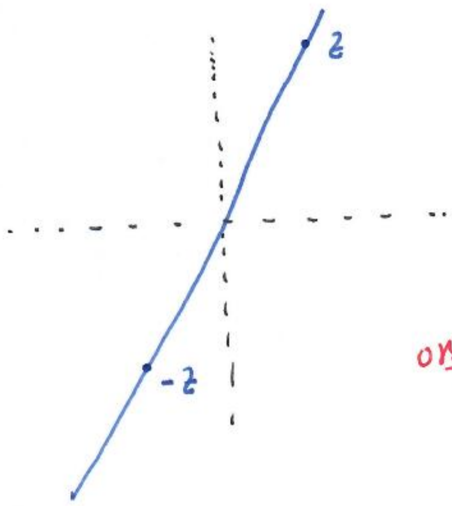
teoría

si $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ -y = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x^2+y^2 = 1$

Luego la solución es la circunferencia de centro 0 y radio 1.

HOJA 1:

PROBLEMA 4. $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\quad z,\ -z,\ \overline{1/z},\ \overline{-1/z}$



$$z$$

$$-z = (-1)\,z$$

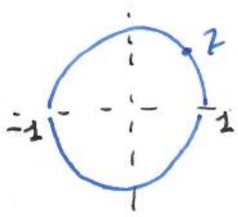
$$\overline{1/z} = \overline{\frac{\bar z}{z\bar z}} = \frac{1}{|z|^2}\,\bar{\bar z} = \frac{1}{|z|^2}\,z$$

$$\overline{-1/z} = \dots\dots = -\frac{1}{|z|^2}\,z$$

OBSERV. SI $|z|>1$ $\quad \frac{1}{|z|^2}z$ ESTÁ ENTRE 0 Y z

SI $|z|<1$ $\quad \frac{1}{|z|^2}z$ ESTÁ SOBRE LA RECTA QUE UNE 0 Y z MÁS ALLÁ DE z.

PROBLEMA 5. a) SEA $z \neq 1, -1$ Y $|z|=1$



$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)\overline{(1-z)}}{(1-z)\overline{(1-z)}} = \frac{1}{|1-z|^2}\cdot\left(\cancel{1}+z-\bar z-|\cancel{z}|^2\right)$$

$$= \frac{1}{|1-z|^2}\left(2\,\mathrm{Im}\,z\ i\right) =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}\,i \quad \text{IMAGINARIO}$$

PURO YA QUE $\mathrm{Im}\,z \neq 0$ $\quad (z\neq -1 \text{ o } z \neq 1)$.

PROBLEMA 6: a) $z^2-3z+4=0$

RESOLVEMOS LA ECUACIÓN DE 2º GRADO Y

$$z = \frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-7} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\,i$$

b) $z^3-3z^2+4z-2=0$ $\quad$ $z=1$ ES CLARAMENTE UNA RAÍZ DIVIDIENDO

$$(z^3-3z^2+4z-2) = (z-1)(z^2-2z+2)=0$$

RESOLVEMOS AHORA $z^2-2z+2=0$

c) $z^4-2z^2+4 = (z^2-1)^2+3=0$ $\quad$ DESPEJANDO

$$z = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-3}+1} = \pm\sqrt{1\pm\sqrt{3}\,i}$$

HOJA 1:

PROBLEMA 7) a) $z = -1 + yi$

$$\frac{z}{z^2} = \frac{1}{z} = \frac{1}{-1+yi} = \frac{1}{-1+yi} \cdot \frac{-1-yi}{-1-yi} =$$

$$= \frac{-1-yi}{1+y^2}$$ AHORA

$$\left| \frac{z}{z^2} + \frac{1}{2} \right|^2 = \left| \frac{-1}{1+y^2} - \frac{yi}{1+y^2} + \frac{1}{2} \right|^2 =$$

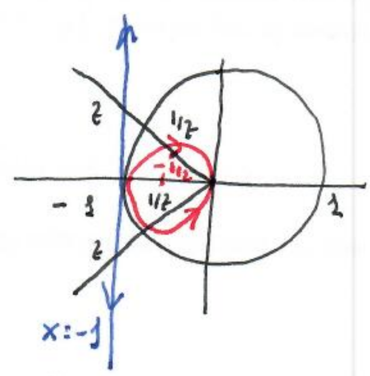
$$= \left| \frac{-2 + (1+y^2)}{2(1+y^2)} - \frac{y}{1+y^2} i \right|^2 = \left[\frac{y^2-1}{2(1+y^2)} \right]^2 + \left[\frac{y}{1+y^2} \right]^2 =$$

$$= \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{4(1+y^2)^2} + \frac{y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{y^4 - 2y^2 + 1 + 4y^2}{4(1+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y^4 + 2y^2 + 1}{4(1+y^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

LUEGO EFECTIVAMENTE $\left| \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{z}$ PERTENECE A LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO $1/2$ Y CENTRO $-1/2$.

GRÁFICAMENTE:



b) $f(z) = (\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)\, z = (\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)\,|z|\,(\cos \operatorname{Arg} z + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg} z)$

z EN FORMA POLAR

$= |z| \left(\cos(\pi/3 + \operatorname{Arg} z) + i \operatorname{sen}(\pi/3 + \operatorname{Arg} z) \right).$

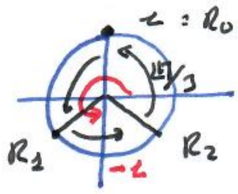
FORMULA DEL PRODUCTO EN FORMA POLAR

HEMOS GIRADO z UN ÁNGULO $\pi/3$

c) AQUÍ ESTAMOS GIRANDO z UN ÁNGULO DE $\pi/3$ Y DESPUÉS LO TRASLADAMOS $(1+i)$.

HOJA 1:

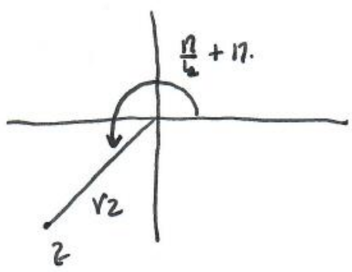
PROBLEMA 8:] a)



c) $\sqrt[5]{-1-i}$ SEA $z = -1-i$ $|z| = \sqrt{2}$.

Arco $\arg z = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4} + \pi$.

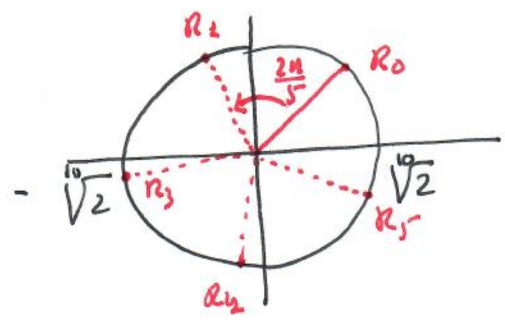
YA QUE SIGNO Re z = SIGNO Im z NEGATIVO



POR LA FÓRMULA DE CÁLCULO DE RAÍCES

$$R_k = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\frac{1}{5} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\frac{1}{5} + \frac{2\pi k}{5}\right)\right)$$

$$= \left\{ \sqrt[10]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{5}\right)\right) : k = 0, 1 .. 4 \right\}$$



PROBLEMA 9.] a) $z \neq 0$ y SEA $\sqrt[n]{z} = \{R_0, R_1, \dots R_{n-1}\}$

SEA $w_0 \dots w_{n-1}$ LAS n RAÍCES DE LA UNIDAD

$(w_k = \sqrt[n]{1} \iff w_k^n = 1)$

SEA $R_k = \sqrt[n]{z} \iff R_k^n = z$ AHORA

$(R_k w_j)^n = R_k^n w_j^n = z \cdot 1 = z \quad \forall j = 0, 1, \dots n-1$

ADEMÁS $R_k w_j \neq R_k w_l$ SI $l \neq j$

YA QUE $w_j \neq w_l$ SI $l \neq j$

LUEGO $\{R_k w_j\}_{j=0}^{n-1}$ SON n RAÍCES DISTINTAS DE z Y COMO SOLO TIENE n, SON TODAS SUS RAÍCES.

HOJA 1:

PROBLEMA 9:) b) Si $w_j^n = 1$ y $w_l^n = 1$

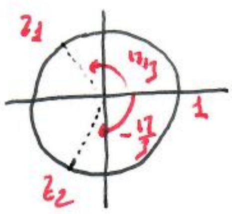
entonces $(w_j\, w_l)^n = w_j^n\, w_l^n = 1$.

c) Sea w_j con $w_j^n = 1$ y w_l con $w_l^n = 1$

entonces $\left(\frac{1}{w_j}\right)^n = \frac{1}{w_j^n} = 1$ es decir la inversa de una raíz n-ésima de la unidad es también una raíz n-ésima de la unidad.

Ahora por b) $\left(\frac{1}{w_j} \cdot w_l\right)^n = 1$.

PROBLEMA 10:) $\{1, z_1, z_2\} = \sqrt[3]{1} = \{\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3} : k = 0,1,2\}$



Observemos que:

$\overline{z_1} = z_2$

$\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} = \overline{z_1} = z_2$

Luego la respuesta correcta es la c)

$z_1^{-1} = z_2$.

PROBLEMA 11:) c) Si $m \mid n \iff (n = km)$

entonces $z^n - 1 \;\underline{|\; z^m - 1}$

$r(z) \qquad q(z)$

Dividiendo $z^n - 1 = (z^m - 1)\, q(z) + r(z)$ con grado $r <$ grado $z^m - 1 = m$.

$z^m - 1 = 0 \iff z^m = 1$ luego $w_0, w_1, \dots, w_{m-1}$ son las raíces m-ésimas de 1 son todas las raíces de $z^m - 1$

Ahora $w_j^n = (w_j^m)^k = 1$ luego w_j son raíces distintas también de $z^n - 1$; ahora como $z^n - 1 = (z^m - 1)\, q(z) + r(z)$

$\Rightarrow r(w_j) = 0 \;\; \forall j = 0, 1, \dots, m-1$ como grado $r < m \Rightarrow r \equiv 0$.

HOJA 1:

PROBLEMA 12:

SI w ES UNA RAIZ N-ÉSIMA DE LA UNIDAD

$$w^{n-1} + w^{n-2} + \quad + w + 1 = 0 \quad \left(\text{PROBLEMA 11 b)} \right)$$

EN PARTICULAR PARA $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$.

$$\left(w^n = \cos n \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{n} = 1 \right)$$

POTENCIAS EN FORMA POLAR

ASÍ

$$\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right)^{n-1} + \cdots + \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right) = -1$$

DESPEJANDO EN LA FÓRMULA DE ARRIBA

USANDO LAS POTENCIAS EN FORMA POLAR

$$\Leftrightarrow \left(\cos (n-1) \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} (n-1) \frac{2\pi}{n} \right) + \left(\cos (n-2) \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} (n-2) \frac{2\pi}{n} \right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right) = -1$$

SUMANDO

$$\left[\cos (n-1) \frac{2\pi}{n} + \cos (n-2) \frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos 2 \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} \right] +$$

$$+ i \left[\operatorname{sen} (n-1) \frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen} (n-2) \frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen} 2 \frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right] = -1$$

IGUALANDO PARTE REAL E IMAGINARIA

a) $\cos (n-1) \frac{2\pi}{n} + \cos (n-2) \frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos 2 \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} = -1$

b) $\operatorname{sen} (n-1) \frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen} (n-2) \frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen} 2 \frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = 0$.

HOJA 1:

PROBLEMA $\boxed{13}$ $(\cos t + i \,\text{sen}\, t)^3 =$

USANDO LAS POTENCIAS DE UN COMPLEJO EN POLARES

$$= \cos 3t + i \,\text{sen}\, 3t$$

USANDO EL DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON

$$(\cos t + i \,\text{sen}\, t)^3 = \cos^3 t + 3\cos^2 t\,(i \,\text{sen}\, t) + 3\cos t\,(i \,\text{sen}\, t)^2 + (i \,\text{sen}\, t)^3 =$$

$$= (\cos^3 t - 3\cos t \,\text{sen}^2 t) + i(-\text{sen}^3 t + 3\cos^2 t \,\text{sen}\, t)$$

AHORA IGUALANDO PARTES REALES E IMAGINARIOS

$$\boxed{\cos 3t} = \cos^3 t - 3\cos t \,\text{sen}^2 t =$$

$$= \cos^3 t - 3\cos t\,(1 - \cos^2 t) =$$

$$= \cos^3 t - 3\cos t + 3\cos^3 t = \boxed{4\cos^3 t - 3\cos t}$$

$$\boxed{\text{sen}\, 3t} = -\text{sen}^3 t + 3\cos^2 t \,\text{sen}\, t =$$

$$= -\text{sen}^3 t + 3(1 - \text{sen}^2 t)\,\text{sen}\, t =$$

$$= \boxed{-4\,\text{sen}^3 t + 3\,\text{sen}\, t.}$$

HOJA 1:

PROBLEMA 14)

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

SABEMOS QUE $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$

$z = x + iy$

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Y QUE $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$.

POR TANTO $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\, z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$ ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$ ES CONVERGENTE.

POR LA MISMA RAZON $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$ ES CONVERGENTE

LUEGO $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$ ES CONVERGENTE

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $z \in \mathbb{C}$ ES CONVERGENTE

YA QUE $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$

CÁLCULO

COMO LA SERIE CONVERGE EN MODULO, POR a) LA SERIE ES CONVERGENTE.

c) $\boxed{e^{it}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

CÁLCULO

$= \boxed{\cos t + i \,\mathrm{sen}\, t}$ FÓRMULA DE EULER

EN PARTICULAR $e^{i\pi} = \cos \pi + i \,\mathrm{sen}\, \pi = -1 \iff$

$\iff \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

HOJA 1:

PROBLEMA 15

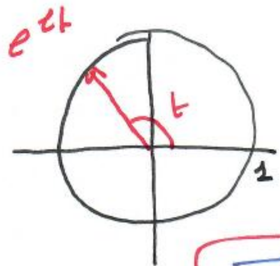
a) $\boxed{e^{i(t+2\pi)}} =$

FÓRMULA DE EULER

$= \cos(t+2\pi) + i\,\text{sen}(t+2\pi) = \cos t + i\,\text{sen}\,t = \boxed{e^{it}}$

FUNCIONES 2π-PERIÓDICAS

b) $|e^{it}| = |\cos t + i\,\text{sen}\,t| = \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = 1$



c) $\boxed{\overline{e^{it}}} = \overline{(\cos t + i\,\text{sen}\,t)} = \cos t - i\,\text{sen}\,t =$

$\cos t$ PAR
$\text{sen}\,t$ IMPAR

$= \cos(-t) + i\,\text{sen}(-t) = \boxed{e^{-it}}$

d) $\boxed{\dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2}} = \dfrac{e^{int} + \overline{e^{int}}}{2} = \dfrac{2\,\text{Re}\,e^{int}}{2} =$

$z + \bar{z} = 2\,\text{Re}\,z$

$= \boxed{\cos nt}$

e) $\boxed{\dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2}} = \dfrac{e^{int} - \overline{e^{int}}}{2} = \dfrac{2\,\text{Im}\,e^{int}}{2} =$

$z - \bar{z} = 2\,\text{Im}\,z$

$= \boxed{\text{sen}\,nt}$

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt + i\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,nt\,dt =$

LINEALIDAD

$= \dfrac{\text{sen}\,nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + i\left(\dfrac{-\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$ $\quad i(-1) = i^3 = \dfrac{1}{i}$

$= i\left(\dfrac{\text{sen}\,nt}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(\dfrac{\cos nt}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)\right) =$

$= \left(\dfrac{\cos nt}{in} + i\,\dfrac{\text{sen}\,nt}{in}\right|_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{e^{int}}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

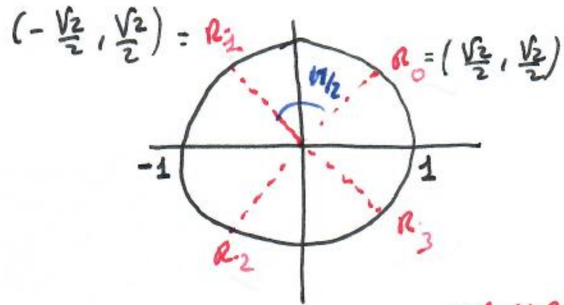
HOJA 1:

PROBLEMA 18º

a) z^4+1 LAS RAÍCES DE ESTE POLINOMIO

SON $z^4+1=0 \iff z^4=-1 \iff \sqrt[4]{-1}$

$$\sqrt[4]{-1} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right) : k=0,1,2,3\right\}$$



LAS RAÍCES R_0 Y R_3 SON CONJUGADAS

LAS RAÍCES R_1 Y R_2 SON CONJUGADAS

OBSERVACIÓN $(z-(\alpha+\beta i))(z-(\alpha-\beta i)) =$

$$= z^2 - (\alpha-\beta i)z - (\alpha+\beta i)z + |\alpha+\beta i|^2 =$$

$$= z^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha+\beta i)\,z + \alpha^2+\beta^2 =$$

$$= z^2 - 2\alpha z + \alpha^2+\beta^2 = (z-\alpha)^2+\beta^2$$

ASÍ $z^4+1 = \underbrace{(z-R_0)(z-R_3)(z-R_1)(z-R_2)}_{\text{DESCOMPOSICIÓN EN } \mathbb{C}} =$ OBSERVACIÓN ANTERIOR

$$= \underbrace{\left(\left(z-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\frac12\right)\left(\left(z+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\frac12\right)}_{\text{DESCOMPOSICIÓN EN } \mathbb{R}}$$

SI $z^4+1 = p(x)\,q(x)$ CON $p,q \in \mathbb{Q}[x]$

Grado $p=2$ y Grad $q=2$, en otro caso Grad $p=1$ ó Grad $q=1$

z^4+1 TENDRÍA UNA RAÍZ RACIONAL Y ESO NO ES POSIBLE.

AHORA p Y q SERÍAN DE LA FORMA

$(z-R_j)(z-R_i)$ $j\neq i$ Y EN NINGÚN

CASO (COMPROBAR) SALE UN POLINOMIO CON COEFICIENTES RACIONALES.

HOJA 1:

PROBLEMA 18:

$$z^3 + z^2 - z + 2$$

CLARAMENTE $z = -2$ ES RAÍZ. (MIRAMOS ENTRE LOS DIVISORES DE 2)

DIVIDIENDO

$$z^3 + z^2 - z + 2 = (z+2)(z^2 - z + 1) =$$

DESCOMPOSICIÓN EN $\mathbb{Q}[x]$ Y EN $\mathbb{R}[x]$

$$= (z+2)\underbrace{\left(z - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)\left(z - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)}_{\text{DESCOMPOSICIÓN EN } \mathbb{C}[x].}$$

$z^2 - z + 1 = 0$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$