HOJA 2:

PROBLEMA 1: a)
$$\begin{cases} x + y - z = 2 & E_1 \\ x - y + z = 8 & E_2 \\ -x + y + z = 4 & E_3 \end{cases}$$

SI RESTAMOS $E_2 - E_1$ Y SUMAMOS $E_1 + E_3$ TENEMOS EL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 & E_1 \\ -2y + 2z &= 6 & E_2 \\ 2y &= 6 & E_3 \end{aligned}$$

LUEGO $\boxed{y = 3}$ SUSTITUYENDO EN E_2 $y = 3$

$$-6 + 2z = 6 \Rightarrow \boxed{z = 6}$$

SUSTITUYENDO EN E_1 $y = 3$ Y $z = 6$

$$x + 3 - 6 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

PROBLEMA 2: b)
$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -2 & E_1 \\ 2x - 2y + 5z = 5 & E_2 \\ 3x + 4y + 2z = -1 & E_3 \end{cases}$$

POR SIMPLIFICAR LOS CALCULOS VAMOS A SUMAR $E_1 + E_2$ (ASI EN E_2 DESAPARECE LA y) Y A RESTAR $E_3 - 2E_1$ Y TENEMOS EL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 3z &= -2 & E_1 \\ 7x + 2z &= 3 & E_2 \\ -7x + 8z &= 3 & E_3 \end{aligned}$$

SUMANDO $E_2 + E_3$ LLEGAMOS A.

HOJA 2

$$5x + 2y - 3z = -2$$
$$7x \qquad + 2z = 3$$
$$10z = 6$$

LUEGO $\boxed{z = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}}$; ENTRAMOS EN E_2 CON $z = \frac{3}{5}$

$$7x + \frac{6}{5} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{7}\left[3 - \frac{6}{5}\right] = \frac{1}{7}\left[\frac{9}{5}\right] = \boxed{\frac{9}{35}}$$

Y ENTRAMOS EN E_1 CON $z = \frac{3}{5}$ Y $x = \frac{9}{35}$

$$5\,\frac{9}{35} + 2y - 3\,\frac{3}{5} = -2$$

ASÍ $2y + \frac{9}{7} - \frac{9}{5} = -2$, OPERANDO

$$\boxed{y} = \frac{1}{2}\left[-2 - \frac{9}{7} + \frac{9}{5}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-70 - 45 + 63}{35}\right] = \frac{-52}{70} = \boxed{-\frac{26}{35}}$$

PROBLEMA 3) a)

$$\begin{cases} x + y + z + t = 10 & E_1 \\ x - y + z - t = -2 & E_2 \\ 3x - y + 3z - t = 6 & E_3 \\ 7x - 5y + 7z - 5t = -2 & E_4 \end{cases}$$

LA RESOLUCIÓN DE ESTE PROBLEMA RESPECTO A LO ANTERIOR ES QUE TIENE UNA VARIABLE MÁS. PROCEDEMOS POR GAUSS

SUMAMOS $E_2 + E_1$

" $E_3 + E_1$

Y SUMAMOS $E_4 + 5E_1$

PARA OBTENER EL SISTEMA EQUIVALENTE

HOJA 2

$$\left\{\begin{array}{llll} x + y + z + t & = 10 & & E_1 \\ 2x + 2z & = 8 & & E_2 \\ 4x + 4z & = 16 & & E_3 \\ 12x + 12z & = 48 & & E_4 \end{array}\right.$$

OBSERVEMOS QUE $E_3 = 2E_2$

Y QUE $E_4 = 6E_2$

LUEGO ESTE SISTEMA ES EQUIVALENTE A

$$x + y + z + t = 10$$

$$2x + 2z = 8$$

NOS HEMOS QUEDADO CON 2 ECUACIONES Y 4 INCÓGNITAS, LUEGO NO PODEMOS ESPERAR QUE EXISTA SOLUCIÓN ÚNICA.

ASÍ $\boxed{x = 4 - z}$

Y ENTRANDO EN E_1 CON $(x = 4 - z)$

$(4 - \cancel{z}) + y + \cancel{z} + t = 10$ LUEGO

$\boxed{y = 6 - t}$

LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ES MÚLTIPLE.

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 4 - z \\ y = 6 - t \\ z = z \\ t = t \end{array}}$$

HOJA 2:

PROBLEMA 4:

a) $$\begin{cases} x + y - z - u + v = 0 & E_1 \\ x + 2y + z + 2u - v = 0 & E_2 \\ -x + y + 5z + 7u - 5v = 0 & E_3 \end{cases}$$

TENEMOS 3 ECUACIONES Y 5 INCÓGNITAS LUEGO NO PODEMOS ESPERAR UNA SOLUCIÓN ÚNICA

RESTANDO $E_2 - E_1$

Y SUMANDO $E_3 + E_1$ TENEMOS EL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{aligned} x + y - z - u + v &= 0 & E_1 \\ y + 2z + 3u - 2v &= 0 & E_2 \\ 2y + 6z + 4u - 6v &= 0 & E_3 \end{aligned}$$

AHORA RESTANDO $E_3 - 2E_2$ TENEMOS

$$\begin{aligned} x + y - z - u + v &= 0 \\ y + 2z + 3u - 2v &= 0 \\ 2z + 3u - 2v &= 0 \end{aligned}$$

OBSERVAMOS QUE $y = 0$

Y $\boxed{z = \frac{1}{2}(-3u + 2v) = -\frac{3}{2}u + v}$

ENTRANDO EN E_1 CON $y = 0$ Y $z = -\frac{3}{2}u + v$

$$x + \frac{3}{2}u - \cancel{v} - u + \cancel{v} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}u \\ y &= 0 \\ z &= -\tfrac{3}{2}u + v \\ u &= u \\ v &= v \end{aligned}}$$

SOLUCIÓN

HOJA 2:

PROBLEMA 5:

$X \times 1gr + Y \times 1gr + Z \times 1gr = 1000gr$ de S

$X \times 2gr + Y \times 1gr + Z \times 4gr = 2000gr$ de H

$2X + 3Y + 5Z = 2500$ €

TENEMOS EL SISTEMA

$$x + y + z = 1000 \quad E_1$$
$$2x + y + 4z = 2000 \quad E_2$$
$$2x + 3y + 5z = 2500 \quad E_3$$

QUE RESOLVEMOS POR GAUSS, ASÍ

RESTANDO $E_2 - 2E_1$

Y $E_3 - 2E_1$

OBTENEMOS EL SISTEMA EQUIVALENTE

$$x + y + z = 1000 \quad E_1$$
$$-y + 2z = 0 \quad E_2$$
$$y + 3z = 500 \quad E_3$$

SUMANDO $E_2 + E_3$

$$x + y + z = 1000$$
$$-y + 2z = 0$$
$$5z = 500$$

LUEGO $\boxed{z = 100}$ ENTRANDO EN E_2 CON $z = 100$

SE TIENE QUE $\boxed{y = 200}$

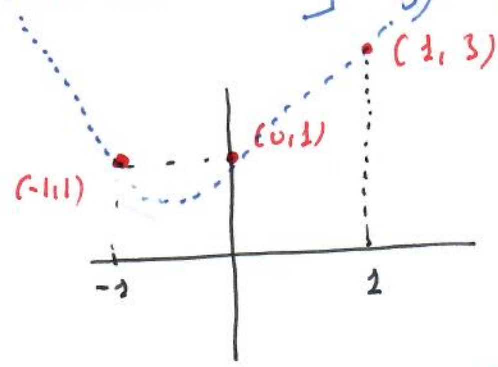
Y ENTRANDO EN E_1 CON $z = 100$ Y $y = 200$

TENEMOS QUE $x + 200 + 100 = 1000$

LUEGO $\boxed{x = 700}$

HOJA 2

PROBLEMA 6.] b) $(0,1)$, $(1,3)$ y $(-1,1)$; $n=2$



BUSCAMOS UNA FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO $n=2$

$$f(x) = ax^2+bx+c$$

DE MODO QUE SU GRÁFICA PASE POR LOS TRES PUNTOS, ES DECIR

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= \qquad\qquad c = 1 \\ f(1) &= a+b+c = 3 \\ f(-1) &= a-b+c = 1 \end{aligned}\right\}$$

SISTEMA 3×3

EQUIVALENTE A

$$c=1$$
$$a+b=2$$
$$a-b=0 \iff a=b$$
$$a=b=c=1$$

LUEGO

y $\boxed{f(x) = x^2+x+1}$ SOLUCIÓN.

HOJA 2

PROBLEMA 8

$$\begin{aligned} 3x + 3y - z &= 0 \quad E_1 \\ -2x - 4y + mz &= 0 \quad E_2 \\ 4x + 3y + 6z &= 0 \quad E_3 \end{aligned}$$

POR GAUSS

SUMANDO $E_2 + \frac{2}{3} E_1$

Y RESTANDO $E_3 - \frac{4}{3} E_1$ TENEMOS EL

SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{aligned} 3x + 3y - z &= 0 \quad E_1 \\ -2y + (m - \tfrac{2}{3}) z &= 0 \quad E_2 \\ -y + (\tfrac{4}{3} + 6) z &= 0 \quad E_3. \end{aligned}$$

AHORA SI HACEMOS $E_3 - 1/2\, E_2$, TENEMOS

$$\begin{aligned} 3x + 3y - z &= 0 \\ -2y + (m - 2/3) z &= 0 \\ \left[\frac{22}{3} - \frac{1}{2}\left(m - \frac{2}{3}\right)\right] z &= 0 \end{aligned}$$

SI $\frac{22}{3} - \frac{1}{2} m + \frac{1}{3} \neq 0$ ENTONCES EL SISTEMA TIENE POR SOLUCIÓN ÚNICA $x = y = z = 0$

SI $\boxed{m = 2 \times \frac{23}{3} = \frac{46}{3}}$

ENTONCES DE E_2

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(\frac{46}{3} - \frac{2}{3}\right) z = \frac{22}{3} z}$$

Y COMO $3x + 3y - z = 3x + 22z - z = 0$

TENEMOS QUE $x = -7z$

PARA $m = \frac{46}{3}$ SE TIENE QUE $x = -7z$, $y = \frac{22}{3} z$, $z = z$

HOJA 2:

PROBLEMA 9.

b) $\begin{cases} mx - y + z = 1 & E_1 \\ x + y - 2z = 1 & E_2 \\ 3x - 2y + 4z = -3 & E_3 \end{cases}$

USANDO GAUSS, HACEMOS $E_2 + E_1$ Y $E_3 - 2E_1$ Y NOS QUEDA EL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{aligned} mx - y + z &= 1 \quad E_1 \\ (1+m)x \quad - z &= 2 \quad E_2 \\ (3-2m)x \quad + 2z &= -5 \quad E_3 \end{aligned}$$

SI AHORA HACEMOS $E_3 + 2E_2$ TENEMOS

$$\begin{aligned} mx - y + z &= 1 \\ (1+m)x \quad - z &= 2 \\ 5x &= -1 \end{aligned}$$

ASÍ $\boxed{x = -1/5}$

SUSTITUYENDO EN E_2 $(1+m)(-\frac{1}{5}) - z = 2$

LUEGO $\boxed{z = -1/5 - 1/5\, m - 2 = -\frac{11}{5} - \frac{1}{5} m}$

Y SUSTITUYENDO EN E_1

$$m(-1/5) - y + \left(-\frac{11}{5} - \frac{1}{5} m\right) = 1$$

ASÍ $\boxed{y = -\frac{2}{5} m - \frac{11}{5} - 1 = -\frac{16}{5} - \frac{2}{5} m}$

ESTE SISTEMA TIENE SOLUCIÓN ÚNICA PARA CUALQUIER VALOR $m \in \mathbb{R}$, Y LA SOLUCIÓN ES

$$x = -1/5$$
$$y = -\frac{16}{5} - \frac{2}{5} m$$
$$z = -\frac{11}{5} - \frac{1}{5} m.$$

Hoja 2:

Problema 10: $U = \{ (\lambda, \lambda+\beta, \lambda-\beta, \lambda+2\beta) : \lambda,\beta \in \mathbb{R} \}$

Sea $(1,2,1,1)$ nos preguntan si se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \\ 2 &= \lambda + \beta \\ 1 &= \lambda - \beta \\ 1 &= \lambda + 2\beta \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de 4 ecuaciones y 2 incógnitas. Si el sistema es compatible $(1,2,1,1) \in U$, si no $(1,2,1,1) \notin U$.

$1 = \lambda$ luego

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + \beta \Rightarrow \beta = 1 \\ 1 &= 1 - \beta \Rightarrow \beta = 0 \quad !! \\ 1 &= 1 + 2\beta \end{aligned}$$

El sistema es <u>incompatible</u>, luego $(1,2,1,1) \notin U$.

Si $(x,y,z,w) \in U$, entonces

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \lambda + \beta \\ z &= \lambda - \beta \\ w &= \lambda + 2\beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= x + \beta \Leftrightarrow \beta = y - x \\ z &= x - \beta \\ w &= x - 2\beta \end{aligned}$$

Luego sustituyendo

$$z = x - (y - x) = 2x - y$$
$$w = x - 2(y - x) = 3x - 2y$$

y por tanto (hemos usado dos ecuaciones para despejar "λ" y "β", y nos han quedado dos ecuaciones con 4 incógnitas)

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ 3x - 2y - w &= 0 \end{aligned}\right\}$$