HOJA 2:

PROBLEMA 11) a) $A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} & \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \end{array} \sim$

$$\underset{\substack{F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 8F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{4}F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} \underset{F_3 + 7F_2}{\sim}$$

$$\underset{(1)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{F_1 - 2F}{\sim} \underset{(2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

FORMA NORMAL DE HERMITE

DE (1) O (2) SE DEDUCE QUE EL RANGO DE LA MATRIZ A ES $\underline{\underline{2}}$

PROBLEMA 12) a) $D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \end{array} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 - 3F_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \underset{\substack{-F_2 \\ \frac{1}{12}F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 - F_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1 + 3F_3 \\ F_2 - 4F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EL RANGO DE D ES $\underline{\underline{3}}$

HOJA 2.

PROBLEMA 13:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 9 & -1 & 6 \\ 6 & 15 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

A ES 3×2
B ES 2×4
LUEGO $A \times B$ ES 3×4

$$4A \cdot (-3B) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 12 & 8 \\ 20 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -9 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 24 & 36 \\ 48 & -108 & 12 & 72 \\ -72 & -180 & 36 & 144 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}} \underset{A^t}{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 41 \end{pmatrix}$$

A ES 3×2
A^t ES 2×3
LUEGO $A \cdot A^t$ ES 3×3

$$B^t B = \underset{B^t}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & -3 \\ 6 & 9 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

B^t ES 4×2
B ES 2×4
LUEGO $B^t B$ ES 4×4

HOJA 2:

PROBLEMA 14. SI $A, B \in M_{n \times n}$

a) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) =$

$= A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

COMO NO SIEMPRE ES CIERTO QUE $AB = BA$

PARECE QUE $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

EJEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ NO CONMUTAN COMO SE PUEDE COMPROBAR FÁCILMENTE.

AHORA $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^2 =$

$= 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$\neq$

POR OTRO LADO

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A(A-B) + (-B)(A-B) =$

$= A^2 - AB - BA + B^2$ COMO NO SIEMPRE $AB = BA$, NO PODEMOS ASEGURAR QUE SEA CIERTA LA IGUALDAD

c) $(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) =$

$= A^2 - AB + BA - B^2$ DE NUEVO COMO NO SIEMPRE $AB = BA$, NO PODEMOS ASEGURAR QUE SEA CIERTA LA IGUALDAD.

HOJA 7:

PROBLEMA 15:] $AX - 2B + C = D$

SI Q ES UNA MATRIZ $Q + (-Q) = 0$

LUEGO $AX = D - C + 2B$

SI EXISTE A^{-1} (VEAMOSLO:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ USANDO EL MÉTODO DE GAUSS

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{3}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & 1/3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2+2F_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & 1/3 & 0 \\ 0 & -3+\frac{4}{3} & 2/3 & 1 \end{array}\right) \underset{-\frac{3}{5}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1-\frac{2}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3+\frac{4}{15} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

ASI $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

LUEGO $A^{-1}AX = \boxed{X} = A^{-1}(D - C + 2B) =$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 & 19 \\ -2 & -11 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{12}{5} & \frac{19}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{-11}{5} \end{pmatrix}}$$

HOJA 2:

PROBLEMA 16) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

BUSCAMOS $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ DE MODO QUE

$$XB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b & 3a-2b \\ 2c-d & 3c-2d \end{pmatrix} =$$

$$= BX = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ -a-2c & -b-2d \end{pmatrix}$$

Y ASÍ TIENE QUE OCURRIR QUE

$$\left.\begin{aligned} \cancel{2a} - b &= \cancel{2a} + 3c \\ 3a - 2b &= 2b - 3d \\ 2c - d &= -a - 2c \\ 3c - \cancel{2d} &= -b - \cancel{2d} \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} b + 3c &= 0 \\ 3a - 4b + 3d &= 0 \\ a + 4c - d &= 0 \\ b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

SISTEMA DE 4 INCÓGNITAS Y 3 ECUACIONES (LA PRIMERA Y ÚLTIMA ECUACIONES SON IGUALES)

USANDO M. GAUSS

$$\begin{aligned} a + 4c - d &= 0 \\ 3a - 4b + 3d &= 0 \\ b + 3c &= 0 \end{aligned} \quad \underset{E_2 - 3E_1}{\sim}$$

$$\begin{aligned} a + 4c - d &= 0 \\ -4b - 12c + 6d &= 0 \\ b + 3c &= 0 \end{aligned} \quad \sim \quad \begin{aligned} a + 4c &= d \\ b + 3c &= 0 \\ -4b - 12c &= -6d \end{aligned}$$

EN ESTAS CONDICIONES $d = 0$

$$\left.\begin{aligned} a + 4c &= 0 \\ b + 3c &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{LUEGO} \quad \begin{aligned} a &= -4c \\ b &= -3c \\ c &= c \\ d &= 0 \end{aligned}$$

ASÍ $X = \begin{pmatrix} -4c & -3c \\ c & 0 \end{pmatrix}$ $c \in \mathbb{R}$

SI $BX = XB$
y $BY = YB$
$XYB = XBY =$
$= BXY$.

HOJA 2:

PROBLEMA 17.

$$\begin{cases} X + 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} & E_1 \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & E_2 \end{cases}$$

USANDO EL MÉTODO DE GAUSS

$$E_2 - 3E_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} X + 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ -11Y = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ASÍ

$$\boxed{Y = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Y POR TANTO

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 18: a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

COMO $A = -I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I + B$ Y

$IB = BI = B$, ENTONCES USANDO EL DESARROLLO DE NEWTON

$$A^n = ((-1)I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k I^k \cdot B^{n-k}$$

AHORA $I^k = I$

Y $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ LUEGO $\begin{cases} B^k = B & \text{SI } k \text{ IMPAR} \\ B^k = I & k \text{ PAR} \end{cases}$

$$= I\left(\sum_{j=0}^{n/2} \binom{n}{2j}\right) - B\left(\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2j+1}\right)$$

HOJA 2

PROBLEMA 18:] b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} =$

$$I + a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I + aB$$

COMO $IB = BI = B$ y COMO

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

USANDO EL DESARROLLO DE NEWTON

$$(I + aB)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aB)^k I^{n-k} =$$

$$= I + \binom{n}{1} aB \cdot I^{n-1}$$

EL RESTO DE TÉRMINOS SON NULOS.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ na & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 19:] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{44}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

, ASÍ $A^k = A$ SI k ES IMPAR

y $A^k = I$ SI k ES PAR

LUEGO $\boxed{A^{44} = I}$

PARA $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{63}$ USA EL APARTADO b) DEL PROBLEMA ANTERIOR.

HOJA 2:

PROBLEMA 20:] a)

$$x_{n+1} = \frac{95}{100} x_n + \frac{45}{100} y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{5}{100} x_n + \frac{55}{100} y_n.$$

SEGÚN NOS DICE EL ENUNCIADO

EN FORMA MATRICIAL

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{45}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{55}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

ASÍ $$T = \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{45}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{55}{100} \end{pmatrix}$$

OBSERVAMOS QUE LA SUMA DE LOS ELEMENTOS DE CADA COLUMNA ES SIEMPRE 1

b) SI $y_n = 0,2$ ENTONCES $x_n = 0,8$

Y AL DÍA SIGUIENTE

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{45}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{55}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Y $$y_{n+1} = \frac{5}{100} \times \frac{80}{100} + \frac{55}{100} \times \frac{20}{100} =$$

$$= \frac{4}{100} + \frac{11}{100} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ Ó } 15\%$$

POR TANTO $x_{n+1} = 0,85$; VEAMOS QUE ES ASÍ EFECTIVAMENTE.

$$x_{n+1} = \frac{95}{100} \times \frac{80}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{76}{100} + \frac{9}{100} = \frac{85}{100}.$$

AL SEGUNDO DÍA, EL PORCENTAJE DE ENFERMOS ES

$$y_{n+2} = \frac{5}{100} x_{n+1} + \frac{55}{100} \cdot y_{n+1} = \frac{5}{100} \frac{85}{100} + \frac{55}{100} \times \frac{15}{100} =$$

$$= \frac{425}{10^4} + \frac{825}{10^4} = \frac{1250}{10^4} = 0,125 \text{ Ó } 12,5\%.$$

HOJA 2:

PROBLEMA 2) a) $A = (a_{i,j})$

Por otro lado $A^t = (b_{i,j})$ con $b_{i,j} = a_{j,i}$

Luego $A + A^t = (c_{i,j})$ con

$$c_{i,j} = a_{ij} + b_{i,j} = a_{ij} + a_{j,i}$$

$$\parallel$$

Por otro lado

$$c_{j,i} = a_{j,i} \; b_{j,i} = a_{j,i} + a_{i,j}$$

Luego $A + A^t$ es simétrica

b) Usando la notación anterior

$$A - A^t = (c_{i,j}) \quad \text{con}$$

$$c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} = a_{i,j} - a_{j,i}$$

Por otro lado

$$c_{j,i} = a_{j,i} - b_{j,i} = a_{j,i} - a_{i,j}$$

Así $c_{j,i} = -c_{i,j}$ y la matriz $A - A^t$ es antisimétrica

Observemos que

$$A = \underbrace{\tfrac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{antisimétrica}}$$

c) Si A es antisimétrica, $(A^2)^t = A^t A^t = (-A)(-A) = A^2$ luego A^2 es simétrica

Usamos que $(A \cdot B)^t = B^t A^t$.

Si n es par $A^n = (A^2)^k$ A^2 simétrica

Luego $((A^2)^k)^t = ((A^2)^t)^k = (A^2)^k = A^n$ simétrica

Por otro lado $A^{2k+1} = (A^{2k}) A$ y $(A^{2k+1})^t = A^t (A^{2k})^t =$
$= (-A) A^{2k} = -A^{2k+1}$, luego A^{2k+1} es antisimétrica

HOJA 2:

PROBLEMA 22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

COMO MATRIZ ELEMENTAL, SI $B \in M_{3\times 3}$ ENTONCES $A \cdot B$ DEVUELVE LA MATRIZ QUE TIENE LAS DOS PRIMERAS FILAS DE B Y LA TERCERA ES LA SUMA DE LA 3ª FILA DE B CON LA 1ª FILA DE B MULTIPLICADA POR TRES; LO MISMO PASA SI $B \in M_{3\times n}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ 3a_{11} + a_{31} & \cdots & 3a_{n1} + a_{3n} \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 23. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

BUSCAMOS $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ CON $CX = I$

LUEGO

SISTEMA BUSCADO
$$\left\{\begin{array}{ll} a + 3c = 1 & \\ b + 3d = 0 & \Rightarrow b = -3d \Rightarrow b = \frac{3}{5} \\ 3a + 4c = 0 & \\ 3b + 4d = 1 & \Rightarrow -9d + 4d = 1 \Rightarrow d = -\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

RESOLVEMOS

POR OTRO LADO $a = -\frac{4}{3}c$ y $-\frac{4}{3}c + 3c = 1$

LUEGO $\frac{5}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{5}$ y $a = -\frac{4}{5}$

COMPROBACIÓN

$$X\,C = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

HOJA 2:

PROBLEMA 24

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}$$

SI USAMOS EL MÉTODO DE GAUSS (QUE IMPLICA ENCONTRAR LA FORMA NORMAL DE HERMITE) SI LLEGAMOS A VER QUE EL RANGO DE LA MATRIZ ES 3 ENTONCES LA MATRIZ ES REGULAR Y EN EL PROCESO ENCONTRAMOS LA MATRIZ INVERSA

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{4}F_2 \\ \text{y mismo} \\ F_3 + F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1/2 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)$$

LA MATRIZ TIENE RANGO 2 LUEGO NO ES REGULAR Y NO TIENE INVERSA (NO PODEMOS LLEGAR A LA MATRIZ IDENTIDAD CON TRANSFORMACIONES ELEMENTALES)

PROBLEMA 25: SI A y B SON INVERTIBLE Y $AB = BA$, ENTONCES

$$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} \underset{\text{HIPÓTESIS}}{=} (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

PERO ESTO NO ES LO QUE QUEREMOS PROBAR.

COMO $AB = BA$ (y A y B SON REGULARES)

$B = A^{-1}BA$ Y AHORA "PASAMOS" A A LA DERECHA

$$\boxed{A^{-1}B = A^{-1}B}$$

HOJA 2:

PROBLEMA 26:

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}$$

Esta matriz tiene a lo más rango 3.

Si hacemos $F_2 - 6F_1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & -11 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora si hacemos $F_3 - F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin llegar a la forma normal de Hermite, vemos que el rango de la matriz es 3.

PROBLEMA 27:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}$$

Si calculamos su matriz de Hermite
hacemos $F_2 - F_1$ y $F_3 - F_1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esto es lo mismo que multiplicar A por $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y después por $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si ahora hacemos $-F_2$ y después $F_3 + 2F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Esto es como multiplicar por $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y después por

$Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 27 - CONTINUACIÓN HOJA 2

AHORA MACEMOS $-\frac{1}{2}F_3$ Y DESPUÉS

$F_2 + 2F_3$. DESPUÉS $F_1 - 2F_2$

Y NOS QUEDA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

FORMA NORMAL DE HERMITE DE A

ESTO ES LO MISMO QUE MULTIPLICAR CON

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

DESPUÉS CON $Q_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Y

POR ÚLTIMO CON $Q_7 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ASÍ $Q_7 Q_6 Q_5 Q_4 Q_4 Q_3 Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

LA MATRIZ Q QUE BUSCAMOS ES

$Q_7 Q_6 \cdot Q_5 Q_4 Q_3 Q_2 Q_1 = Q.$

COMO LAS MATRICES Q_j $j = 1 \ldots 7$ SON TRANSFORMACIONES ELEMENTALES TODAS SON REGULARES

Y TAMBIÉN LO ES Q.

HOJA 2:

PROBLEMA 28)

a) SEA UN SISTEMA $n \times n$

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

SI $a_{11} \neq 0$, PARA APLICAR EL 1 METODO DE GAUSS NECESITAMOS MULTIPLICAR

(FIJANDO k) $\underbrace{-a_{k,1}/a_{11}}_{1 \text{ DIVISION}}$ POR $\overbrace{a_{12} \dots a_{1,n} \text{ y } b_1}^{}$

n - MULTIPLICACIONES

y otras n sumas $\left(-\frac{a_{k,1}}{a_{11}} a_{1,j} + a_{k,j} \right.$

$j = 2 \dots n$ y $\left. -\frac{a_{k1}}{a_{11}} b_1 + b_k \right)$

TOTAL $(n+1) + n$ OPERACIONES.

PARA $k = 2, 3 \dots n$.

COMO SE HACE $(n-1)(2n+1) = 2n^2 - n - 1)$ OPERACIONES EN TOTAL

SI SIMPLIFICAMOS, A MAYORES, LA 1ª FILA, MULTIPLICAMOS $a_{12} \dots a_{1n}$ b_1 POR $\frac{1}{a_{11}}$

TENEMOS $2n^2 - n - 1 + (n+1)) = 2n^2$

PARA DEJAR EL SISTEMA REDUCIDO A.

$$x_1 + c_{12} x_2 + \dots + c_{1n} x_n = d_1$$
$$c_{22} x_2 + \dots + c_{2n} x_n = d_2$$
$$\vdots$$
$$c_{n2} x_2 + \dots + c_{nn} x_n = d_n$$

HEMOS REDUCIDO EL PROBLEMA A UN SISTEMA $(n-1)\times(n-1)$ QUE NECESITA $2(n-1)^2$ OPERACIONES PARA REDUCIR EL SISTEMA A OTRO $(n-2)(n-2)$

ASÍ PARA TRIANGULARIZAR EL SISTEMA NECESITAMOS

$$2n^2 + 2(n-1)^2 + 2(n-2)^2 + \cdots + 2\,2^2 + 2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k^2 = 2\,\frac{1}{6}\left(n(n+1)(2n+1)\right)$$

HOJA 1: CÁLCULO

AHORA QUEDA CONTABILIZAR LAS OPERACIONES QUE QUEDAN PARA "DESPEJAR" $x_n\ x_{n-1} \dots x_1$.

SI CONOCEMOS $x_n\ x_{n-1} \dots x_{k+1}$

ENTONCES $x_k = d_k - (c_{k\,k+1}x_{k+1} + c_{k\,k+2}x_{k+2} + \dots + c_{kn}x_n)$

EN TOTAL $n-k$ PRODUCTOS Y $n-k$ SUMAS

EN TOTAL $2(n-k)$ OPERACIONES, QUE REPETIMOS PARA DESPEJAR $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots x_n$ EN TOTAL $n-1$ INCÓGNITAS.

ASÍ REALIZAMOS $\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)$

EL TOTAL DE OPERACIONES (COMO MÁXIMO) QUE REALIZAMOS PARA RESOLVER UN SISTEMA POR GAUSS SERÁ

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2k^2}_{\text{TRIANGULARIZACIÓN}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)}_{\text{"DESPEJAR"}} =$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k\right) =$$

$$= 2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n-1) - \frac{(n-1)n}{2}\right) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

OBSERVEMOS QUE ES DEL "ORDEN" DE $\underline{\underline{n^3}}$ OPERACIONES